〈研究ノート〉

関数解析への導入

松　井　柳　平

1　はじめに

さまざまな経済問題，とくに時間を通じた動学的な枠組みでの経済問題を考察する場合，ダイナミック・プログラミングなどを用いた分析が広くおこなわれている（テキストとしては，Ljungqvist and Sargent [4], Sargent [5], Stokey and Lucas [6] などがある）．ダイナミック・プログラミング，及びそれに付随する理論を正確に理解するには，どうしても関数解析の議論を避けることはできない．

関数解析の議論においては，個々の関数について調べるというよりはむしろ，ある条件を満たす関数全体の集合つまり関数空間に，位相あるいは距離を導入して位相空間あるいは距離空間をつくり，その関数空間の完備性や，関数空間から関数空間への写像（作用素）としての微分方程式や積分方程式などを考察する．

微分方程式や差分方程式といった関数方程式において，関数方程式の解としての未知関数が問題となり，バナッハ空間の不動点定理などの関数解析に関する知識が重要となる．

関数解析の議論を追っていくには，重要度に濃淡のある多くのさまざまな定義，命題，定理などに留意しつつ進んでいく必要がある．比較的重要でない多くの煩雑さによって議論展開の中心線を見失うようなことがないようにしなければならない．

本稿は，経済分析において重要となるバナッハ空間の不動点定理に焦点を

絞り，数学的な厳密性をなるべく犠牲にすることなく，しかし比較的周辺的な事項に関しては簡略に扱うことで，全体像についての簡潔な見通しが把握できるように，関数解析への導入部を，前提となる予備知識も含むかたちでコンパクトにまとめてみた．このように，本稿は関数解析へ到達する道筋の展望を目的として書かれたものである．

2　解析学からの準備

コンパクト集合は，経済理論において重要な役割をもっているが，とりわけ次の 2 つの性質が重要である．

定理 2.1.
コンパクト集合内のすべての点列は，収束する部分列をもっている．

定理 2.2.
その定義域がコンパクト集合である連続関数はすべて，その最大値と最小値をその定義域において達成する．

経済学において，均衡の存在を保証するほとんどの定理は，以上の 2 つの結果に依拠している．また，次の定理も重要である．

定理 2.3.
ユークリッド空間においては，コンパクト集合は，有界かつ閉の集合である．

定義 2.1.　各点収束と一様収束

- f_n が f に各点で収束するとは，

  $\forall x \in X\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon, x)\,,$

  $$\text{s.t.}\quad \forall n \geq N\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

- f_n が f に一様収束するとは，

  $\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon)\,,$

  $$\text{s.t.}\quad \forall n \geq N\,,\ \forall x \in X\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

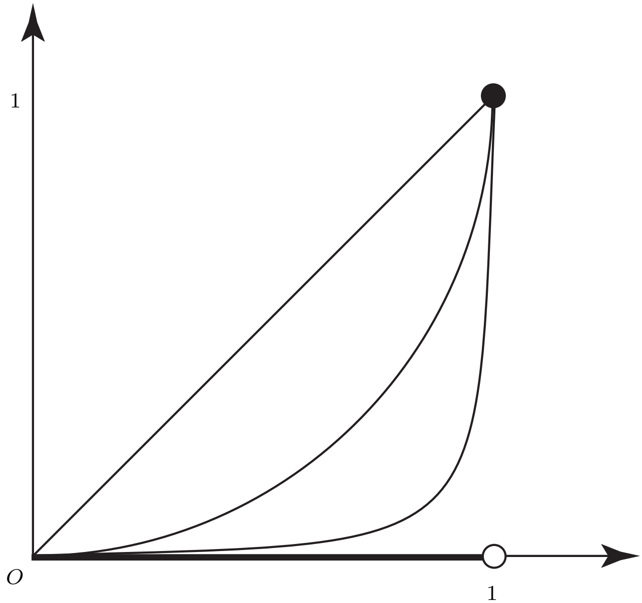

図 **2.1**　例 2.1.

命題 2.1. f_n が f に一様収束するならば，f_n は f に各点収束する.

注意 2.1. f_n が f に各点収束しても，f_n が f に一様収束するとは限らない.次の例 2.1, 2.2 を見よ.

例 2.1.　$X = [0, 1]$，$f_n(x) = x^n$

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \neq 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

この例から，連続関数の各点収束の極限は，連続関数とは限らない，ということがわかる.

例 2.2.　$X = [0, \infty)$，$f_n(x) = \begin{cases} n^2 t & ; \quad 0 \leq t < \frac{1}{n} \\ -n^2 t + 2n & ; \quad \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & ; \quad \frac{2}{n} \leq t \end{cases}$

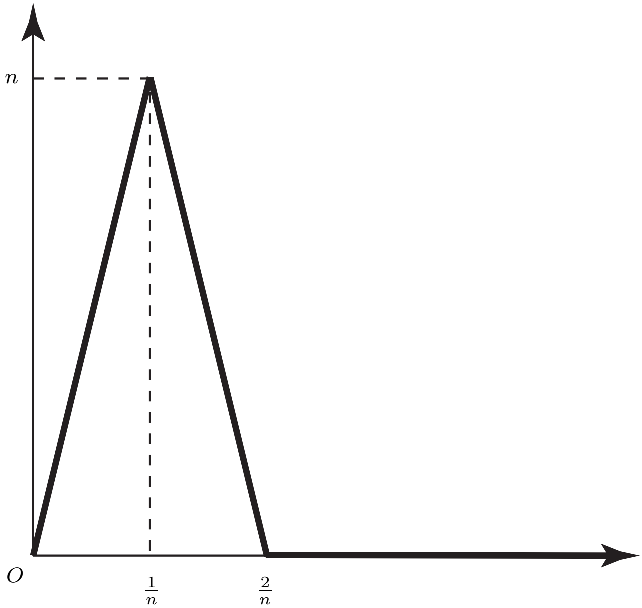

図 **2.2**　例 2.2.

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \equiv 0\,.$$

定理 2.4.

連続関数の列 $\{f_n\}$ が f に一様収束しているならば,

このとき，f は連続である.

3　積分論からの準備

命題 3.1.

$\mathbb{R}^n$ 上の連続関数は，$\mathscr{B}^n$-可測である.

命題 3.2.

$(S, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする.

S 上の関数 f が，有界，可測，実数値関数であり，かつ $\mu(S) < \infty$ であるな

らば,

このとき，f は μ-可積分である．

定理 3.1.　**優収束定理**（ルベーグの収束定理）

$(S, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間,

$\{f_n\}$ を，ほとんどいたるところで可測関数に収束する可積分関数の列とする．

ある可積分関数 g が存在して，$\forall n$，$|f_n| \leq g$ であるならば,

このとき，f は可積分であり,

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu \tag{3.1}$$

が成り立つ．

注意 3.1.

$$\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu$$

であるから，このルベーグの収束定理は，一定の条件のもとでは極限記号と積分記号を交換できることを示している．つまり,

$$\int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu\,. \tag{3.2}$$

ここでは簡単化のため，1 変数関数の微分可能性について，以上のルベーグ積分論を適用することにする．$\mathbb{R}$ 上で考える．なお，位相の言葉，ベクトル解析（多変数関数論）を用いれば，$\mathbb{R}^n$ に拡張することは困難ではない．

区間 $[a, b] \in \mathbb{R}$ 上で定義された連続関数の集合を，$C([a, b])$ で表わす．

命題 3.3.

$f_n \in C([a, b])$ が f に一様収束しているならば,

このとき，$f \in C([a, b])$ であって,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ．

証明

ルベーグの収束定理を使いたい．そのために定理の条件があてはまるかについて調べる．

(1) それぞれの f_n が可積分であること．

- 可測性

  それぞれの f_n は連続関数であるから，命題 3.1 より，f_n は可測である．

- 有界性

  $\mu([a,b]) < \infty$，各 f_n は閉区間 $[a,b]$ 上で最大値も最小値もとる．（$\because$ f_n は連続関数であり，また定理 2.2, 2.3 より）

よって，命題 3.2 より，f_n は可積分である．

(2) すべての $|f_n|$ を一斉におさえる可積分関数が存在すること．

任意の ε として 1 をとり固定する．

$$\exists N\,,\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| \leq 1\,.$$

よって，

$$\exists N\,,\ \forall n \geq N,\ |f_n(x)| \leq 1 + |f(x)|\,.$$

上式右辺 $1 + |f(x)|$ は連続関数であるので，可積分関数である．この証明において，極限を考えているのだから，はじめの有限個（$N-1$ 個）は無視してよい．

したがって，定理 3.1（ルベーグの収束定理）より，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ．

□

次の系は微分と極限操作の順序交換を表わしている．

系 3.1.
f_n を $[a, b]$ 上の C^1 級関数の列とする．（つまり，f_n' は連続）
また，

- f_n は $f = \lim f_n$ に各点収束している，
- f_n' は $g = \lim(f_n')$ に一様収束している

とする．
このとき，$f = \lim f_n$ も微分可能であって，

$$f' = g$$

つまり，

$$(\lim f_n)' = \lim(f_n') .$$

証明
$x \in [a, b]$ を任意に選んで固定する．微積分の基本定理より，

$$f_n(x) - f_n(b) = \int_b^x f_n'(t)dt .$$

両辺で $n \to \infty$ とすれば，

$$f(x) - f(b) = \int_b^x g(t)dt \tag{3.3}$$

である．この式 (3.3) において，左辺は，f_n が f に各点収束することからしたがい，右辺は，f_n' が $g = \lim(f_n')$ に一様収束するので先の命題 3.3 からしたがう．

式 (3.3) がすべての $x \in [a, b]$ で成立する．g が連続だから，再び，微積分の基本定理より，f は微分可能で，かつ $f' = g$.

□

4　関数解析の初歩

洲之内 [3] は理工系向けに書かれたものであるが，縮小写像の不動点定理を理解するにあたって，経済学研究者のニーズに比較的近い導入となっている

ように思われ，参考にした．経済学にとって縮小写像の不動点定理は，均衡の存在証明においてしばしば用いられる有用な定理である．

微分方程式や差分方程式といった関数方程式の解は，数ではなく関数であり，したがって，関数からなる集合が考察の対象となる．例えば，ユークリッド空間といった実数の集合においては，距離概念は常識的にも自明であるように思われ，そのようなユークリッド距離をとくに意識することなく，収束などの位相的性質を考察することができる．しかし，関数からなる集合に対しては適切な距離を意識的に導入する必要がある．

連続関数からなる集合に導入する距離は，関数の一様収束による位相を導くような距離（一様ノルムによる距離）である．連続関数からなる空間はこの距離で完備である．

関数の一様収束の概念は，必ずしも一様ノルムを介する必要はないが，一様ノルムの概念を用い，それによって連続関数からなる空間が完備距離空間となる．

次の命題 4.1 を証明なしに提示しておく．

命題 4.1.
連続関数の和，差，実数倍はまた連続関数である．

以下，閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ を定義域とする連続関数の集合（空間）$C([a, b])$ を中心にして見ていくが，上記の命題 4.1 より，$C([a, b])$ は和とスカラー倍について閉じている．一般に，集合 X が和とスカラー倍について閉じているとき，その集合 X は**ベクトル空間**と呼ばれる．$[a, b]$ 上の連続関数の全体 $C([a, b])$ はベクトル空間になるのである．

ベクトル空間の次元とは，1 次独立にとれるベクトルの最大個数のことである．任意の $n \in \mathbb{N}$ について，ベクトル空間 X に n 個の 1 次独立なベクトルがつねに存在するとき，このベクトル空間 X は**無限次元**であるという．ちなみに，$C([a, b])$ は無限次元である．無限の将来にわたった時間の流れを考慮した経済分析では，無限次元空間上の問題として経済モデルを定式化する

のが一般的である．

さて，$C([a, b])$ 上での**ノルム** $||\cdot||$ を定義する．

定義 4.1.

関数

$$||\cdot|| : C([a, b]) \to \mathbb{R}_+$$

を，

$$||f|| = \max_{x\in[a, b]} |f(x)|$$

によって定める．

このように定義されるノルムは**一様ノルム**と呼ばれる．

注意 4.1.

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

とする．

注意 4.2. f は連続である．したがって，$|f|$ も連続である．よって，$[a, b]$ 上で必ず最大値をとり，その値は非負である．

命題 4.2.

定義 4.1 で定めたノルムは，以下の**ノルムの公理**を満たす．

(1) $||f|| = 0 \iff f = 0$

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$，$f \in C([a, b])$ について，$||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||$

(3) f，$g \in C([a, b])$ について，

$$||f + g|| \leq ||f|| + ||g||.$$

証明

(1)

$$||f|| = 0 \iff \max_{x\in[a, b]} |f(x)| = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \forall\, x \in [a,\, b]\,,\ |f(x)| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall\, x \in [a,\, b]\,,\ f(x) = 0 \\
&\quad (\because\ \text{絶対値の性質 } |x| = 0 \iff x = 0 \text{ より}) \\
&\Longleftrightarrow f = 0\,.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
||\alpha\, f|| &= \max_{x \in [a,\, b]} |\alpha\, f(x)| \\
&= \max_{x \in [a,\, b]} |\alpha| \cdot |f(x)| \\
&= |\alpha| \max_{x \in [a,\, b]} |f(x)| \\
&= |\alpha| \cdot ||f||\,.
\end{aligned}
$$

(3)　絶対値の性質 $|f+g| \leq |f| + |g|$ より，

$$
\begin{aligned}
||f+g|| &= \max_{x \in [a,\, b]} |f+g| \\
&\leq \max_{x \in [a,\, b]} \bigl(|f(x)| + |g(x)|\bigr) \\
&\leq \max_{x \in [a,\, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a,\, b]} |g(x)| \\
&= ||f|| + ||g||\,.
\end{aligned}
$$

□

一般に，ベクトル空間 X のそれぞれの元 $x \in X$ に対して，ノルムの公理を満たすノルム $||x||$ が対応しているとき，X は**ノルム空間**と呼ばれる．$C([a,\, b])$ はノルム空間であることが言えた．

定義 4.2.

$C([a,\, b])$ 上の距離 ρ を，ノルムから誘導された距離

$$
\rho\,(f, g) = ||f - g||
$$

によって定める．

注意 4.3.

$$||f-g|| = \max_{x\in[a,\,b]} |f(x)-g(x)| \in \mathbb{R}$$

である.

命題 4.3.

定義 4.2 における距離 ρ は以下の距離の公理 (1)–(3)，及び性質 (4) を満たす.

$\alpha \in \mathbb{R}$，$f, g, h \in C([a,\,b])$ について，

(1) $\rho\,(f, g) \geq 0$

(2) $\rho\,(f, g) = 0 \iff f = g$

(3) $\rho\,(f, h) \leq \rho\,(f, g) + \rho\,(g, h)$ (三角不等式)

(4) $\rho\,(\alpha f, \alpha g) = |\alpha| \cdot \rho\,(f, g)$

証明

(1) 定義 4.1 , 4.2 より明か.

(2) 定義 4.1 , 4.2 , 命題 4.2(1) より明か.

(3) 命題 4.2(3) より，

$$\begin{aligned}\rho\,(f, h) &= ||f-h|| \\ &= ||f-g+g-h|| \\ &\leq ||f-g|| + ||g-h|| \\ &= \rho\,(f, g) + \rho\,(g, h)\,.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\rho\,(\alpha f, \alpha g) &= ||\alpha f - \alpha g|| \\ &= ||\alpha(f-g)|| \\ &= |\alpha| \cdot ||f-g|| \\ &= |\alpha| \cdot \rho\,(f, g)\,.\end{aligned}$$

□

定義 4.3.

$\{f_n\}$ を $C([a,\,b])$ の列，また $f \in C([a,\,b])$ とする．
実数列 $||f_n - f||$ が 0 に収束するとき，つまり，

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

であるとき，f_n は f に収束するという．

注意 4.4. 「$C([a,\,b])$ に属する関数の列」という代わりに，しばしば「$C([a,\,b])$ の列」という．

命題 4.4.

（定義 4.3 の意味で）f_n が f に収束することと，f_n が f に一様収束することとは，同値である．

証明

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon)\,, \quad \text{s.t.}\ \ \forall n \geq N\,,\ \max_{x\in[a,\,b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon)\,, \quad \text{s.t.}\ \ \forall n \geq N\,,\ \forall x \in X\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
&\Longleftrightarrow f_n \text{は}\ f\ \text{に一様収束する}\,.
\end{aligned}$$

□

定義 4.4.

$C([a,\,b])$ の列 $\{f_n\}$ について，次の条件 (4.1) が成り立つとき，$\{f_n\}$ をコーシー列 (Cauchy sequence) という．

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon)\,, \quad \text{s.t.}\ \ \forall n, m \geq N\,,\ ||f_n - f_m|| < \varepsilon\,. \tag{4.1}$$

命題 4.5.

$C([a,\,b])$ の列 $\{f_n\}$ について，（定義 4.3 の意味で）f_n が f に収束することと，$\{f_n\}$ がコーシー列であることとは，同値である．

証明

($\Rightarrow$) まず，$\{f_n\}$ が（定義 4.3 の意味での）収束列であるならば，$\{f_n\}$ はコーシー列であることを示す．

任意に ε を選んで固定する．$\{f_n\}$ が（定義 4.3 の意味での）収束列であるから，次式を成り立たせるような $N = N_{\frac{\varepsilon}{2}}$ をとることができる．

$$\begin{aligned} n, m \geq N_{\frac{\varepsilon}{2}} &\Longrightarrow ||f_n - f|| < \frac{\varepsilon}{2}\,,\ ||f_m - f|| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow ||f_n - f_m|| \leq ||f_n - f|| + ||f - f_m|| < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

よって，$\{f_n\}$ はコーシー列である．

($\Leftarrow$) 次に，$\{f_n\}$ がコーシー列であるならば，$\{f_n\}$ は（定義 4.3 の意味での）収束列であることを示す．

任意の $x \in [a,\,b]$ について，

$$||f_n - f_m|| \geq |f_n(x) - f_m(x)|$$

が成り立つ．よって，$\{f_n(x)\}$ はコーシー列である．したがって極限が存在する．x にその極限を対応させる関数を $f(x)$ と表わすことにする．こうして，$\{f_n(x)\}$ の各点収束極限として $f(x)$ が得られた．

一方で，

$$||f_n - f_m|| = \max_{x \in [a,\,b]} |f_n(x) - f_m(x)|$$

であるから，

$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N = N(\varepsilon)\,,$

$$\text{s.t.}\quad \forall n, m \geq N\,,\ \forall x \in [a,\,b]\,,\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\,.$$

とくに，$m \to \infty$ とすると，

$$\text{s.t.}\quad \forall n \geq N\,,\ \forall x \in [a,\,b]\,,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

これは，$\{f_n\}$ が f に一様収束することを表わす．よって，f も連続であり，

$$||f_n - f|| = \max_{x \in [a,\, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

となる．よって，$\{f_n\}$ は（定義 4.3 の意味での）収束列である．

$\square$

命題 4.5 は，$C([a,\, b])$ が完備ノルム空間，つまりバナッハ空間 (Banach space) であることを示している．

定義 4.5.　バナッハ空間

一般に，ノルム空間 X の任意のコーシー列が X の点に収束するとき，X は**完備である**といい，完備なノルム空間を**バナッハ空間**という．

系 4.1.

$p, q \in \mathbb{R}$ を定数とする．$C([a,\, b])$ の部分集合として，

$$E \equiv \{f \in C([a,\, b]) \mid \forall\, x \in [a,\, b]\,,\ p \le f(x) \le q\}$$

を考える．このとき，E 内のコーシー列は，E 内に収束先をもつ．

証明

$\{f_n\}$ を，$\forall n$，$f_n \in E$ となるコーシー列とする．命題 4.5 より，$\{f_n\}$ は $C([a,\, b])$ 内に収束先 f をもつ．しかも，f は $\{f_n\}$ の各点収束極限として得られるものである．よって，それぞれの $x \in [a,\, b]$ ごとに，

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,.$$

$f_n \in E$ より，$p \le f_n(x) \le q\,.$

よって，$p \le f(x) \le q\,.$

$\square$

注意 4.5.　系 4.1 は，E が完備な閉部分集合であることを意味している．

定義 4.6.　縮小写像

E を，$C([a,\, b])$ の部分集合とする．

写像 $T : E \to E$ について，$\alpha\,(0 < \alpha < 1)$ が存在して，

$$\forall\, f, g \in E\,, \quad \rho\,(Tf, Tg) \leq \alpha\,\rho\,(f, g)$$

が成り立つとき，T を E の**縮小写像** (contraction map) という．

記法 4.1.

$$T^{\,2} = T \circ T\,, \quad T^{\,3} = T \circ T \circ T\,, \quad \cdots.$$

また,

$$T(f) \equiv Tf\,.$$

補題 4.1.
E を閉集合とし，T を E 上の縮小写像とする．関数列 $\{f_n\}$ を以下のようにつくる：
$f \in E$ として,

$$\begin{aligned}
f_0 &= f \\
f_1 &= Tf \\
f_2 &= T^{\,2} f = Tf_1 \\
f_3 &= T^{\,3} f = T^{\,2} f_1 = Tf_2 \\
&\vdots \\
f_n &= T^{\,n} f = Tf_{n-1} \\
f_{n+1} &= T^{\,n+1} f = Tf_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

このとき，$\{f_n\}$ はコーシー列である．

証明
関数列 $\{f_n\}$ の定義，及び T が縮小写像であることから,
$\exists\, \alpha\,(0 < \alpha < 1)\,$,

$$\rho\,(f_2, f_1) = \rho\,(Tf_1, Tf_0) \leq \alpha\rho\,(f_1, f_0)$$

$$
\begin{aligned}
\rho(f_3, f_2) &= \rho(Tf_2, Tf_1) \leq \alpha\rho(f_2, f_1) = \alpha\rho(Tf_1, Tf_0) \leq \alpha^2\rho(f_1, f_0) \\
&\vdots \\
\rho(f_{n+1}, f_n) &= \rho(Tf_n, Tf_{n-1}) \leq \alpha\rho(f_n, f_{n-1}) \leq \alpha^n\rho(f_1, f_0) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

である．さて，$m > n$ として，$m = n + p$ と書く．このとき，三角不等式（命題 4.3(3)），及び縮小写像の定義（定義 4.6）より，

$$
\begin{aligned}
\rho(f_m, f_n) &= \rho(f_{n+p}, f_n) \\
&= \rho(f_n, f_{n+p}) \\
&\leq \rho(f_n, f_{n+1}) + \rho(f_{n+1}, f_{n+2}) + \cdots + \rho(f_{n+p-1}, f_{n+p}) \\
&\leq \alpha^n\rho(f_0, f_1) + \alpha^{n+1}\rho(f_0, f_1) + \cdots + \alpha^{n+p-1}\rho(f_0, f_1) \\
&= \alpha^n\rho(f_0, f_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{p-1}\right) \\
&= \alpha^n\frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha}\rho(f_0, f_1) \\
&\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}\rho(f_0, f_1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}
$$

よって，$\rho(f_m, f_n) = 0$．したがって，$\{f_n\}$ はコーシー列である．

□

注意 4.6. 集合 E が閉集合であるということは，E 内のコーシー列が E 内に収束先をもつ，ということを含意している．

系 4.1 において，例えば，$p < f(x) < q$ であったとすると，収束先が p あるいは q のとき，E には含まれない．

定理 4.1. **縮小写像の不動点定理**

E を閉集合とし，T を E 上の縮小写像とする．

このとき，$Tf = f$ となる $f \in E$ が存在し，ただひとつである．

証明

すでに見たように，補題 4.1 における関数列 $\{f_n\}$ はコーシー列である．

$\{f_n\}$ の極限を g で表わすことにする．E は閉集合であるから，$g \in E$ である．

まず，$Tg = g$ つまり不動点の存在を証明する．三角不等式（命題 4.3(3)），及び縮小写像の定義（定義 4.6）より，

$$
\begin{aligned}
0 \leq \rho(Tg, g) &\leq \rho(Tg, f_{n+1}) + \rho(f_{n+1}, g) \\
&= \rho(Tg, Tf_n) + \rho(g, f_{n+1}) \\
&\leq \alpha\rho(g, f_n) + \rho(g, f_{n+1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,.
\end{aligned}
$$

よって，$\rho(Tg, g) = 0$. したがって，$Tg = g$.

次に，一意性を証明する．g のみならず，$h \in E$ も $Th = h$ を満たしていると仮定する．$Th = h$ が成り立っているとすると，

$$
\begin{aligned}
\rho(g, h) &= \rho(Tg, Th) \\
&\leq \alpha\rho(g, h) \\
&= \rho(f, g) + \rho(g, h)\,.
\end{aligned}
$$

$0 < \alpha < 1$ であるから，上式が成り立つには，$\rho(g, h) = 0$.
ゆえに，$g \equiv h$.

□

縮小写像の不動点定理はポーランドの数学者バナッハによって確立された．したがってしばしば，バナッハの不動点定理とも呼ばれる．縮小写像の不動点定理は，経済学において均衡存在の証明でしばしば用いられる．次節では，縮小写像の不動点定理の応用として，リプシッツ条件を満たす正規形 1 階常微分方程式の解の存在と一意性の問題を扱うことにする．

5　微分方程式の解の存在と一意性

未知な数値を解として求める方程式を代数方程式というのに対して，未知

関数を解として求める方程式を関数方程式という．時間を通じた動学的な経済問題を考察する場合など，経済学では微分方程式や差分方程式といった関数方程式を用いて分析をおこなうことが多い．

以下，微分方程式を扱うが，差分方程式についても縮小写像の原理を用いた類似の議論，つまり差分方程式の定常解の存在と一意性についての議論を展開することができる（例えば，奥口 [1] を参照）．

本節では，リプシッツ条件を満たす正規形 1 階常微分方程式の解の存在と一意性を扱う．「コーシー・リプシッツの定理」と呼ばれるものである．一般的に，微分方程式についての数学書においては，微分方程式の解の存在と一意性の証明は，ピカールによって考案された逐次近似法によるものがほとんどである．そうしたなかで，齋藤 [2] は縮小写像の不動点定理を用いた証明にも触れており，参考になった．もっともピカールの逐次近似法と縮小写像の不動点定理とは密接に関連している．

閉領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を，

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \le a\,,\ |y - y_0| \le b\}$$

と定義する．つまり，集合 D は，$x \in [\,x_0 - a\,,\ x_0 + a\,]$，　$y \in [\,y_0 - b\,,\ y_0 + b\,]$ を満たす $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の集合である．

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ は初期値と呼ばれ，モデルにとって所与である．

$f(x, y)$ を D 上で定義された連続関数とする．

次の微分方程式を考える．

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

「微分方程式を解く」とは，この関係式から未知の関数である $y(x)$ を具体的に求めるということである．しかし，微分方程式の解法は本節での関心ではない．

上記の変数 x は時間を表わす変数である場合があるが，実際の経済学上の

応用においては，とくに「時間」に限定されるものではない．また微分方程式自体について，経済学においては，

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

というように第 1 式右辺に x を含まず y のみの関数として表わされる**自律系**の微分方程式がよく現われる．自律系の微分方程式は，未知関数 y の値だけで y の動き，つまり dy/dx が決まるシステムである．

ここでの未知関数は y ただ 1 つのみと想定されているが，複数個に拡張することができる．その場合，この微分方程式は連立微分方程式となる．

独立変数を x，未知関数を $y = y(x)$ として，微分方程式は一般に

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

のかたちで表わされる．これを式 (5.1) の第 1 式のように変形することができるとき，**正規形** (normal form) の微分方程式という．

独立変数が 1 つのものを**常微分方程式**という．独立変数が 2 つ以上のものは，**偏微分方程式**と呼ばれる．

式 (5.1) の第 1 式において，未知関数 y の導関数は 1 階導関数のみであるので，1 **階**の微分方程式と呼ばれる．

さて，関数 f になんらかの仮定をおいて，次のことを示したい：

$\exists\delta > 0$,

$\exists!\,\varphi(x)$ ： $[x_0 - \delta,\ x_0 + \delta]$ 上の微分可能な関数,

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0\,. \end{cases} \tag{5.2}$$

記号 5.1.　「$\exists!$」とは,「一意に存在する」の意.

この関数 φ は微分方程式 (5.1) の解にほかならない．$\varphi = y_0$ はこの解に対

する**初期条件**と呼ばれる．本節において，ある条件（後述の仮定 5.1）を満たす関数 f のもとで，微分方程式 (5.1) の解である未知関数 $y=\varphi(x)$ が存在すること，しかも一意に存在することを示したい．

式 (5.2) を言い換えると，

$\exists\,\delta>0\,,$

$\exists!\,\varphi(x)\ :\ I=[\,x_0-\delta\,,\ x_0+\delta\,]$ 上の連続関数，

$$\text{s.t.}\qquad \forall\,x\in I\,,\ \ \varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt\,. \tag{5.3}$$

と書ける．

注意 5.1. 式 (5.2) を x で積分すると，式 (5.3) が得られる．

$$\int_{x_0}^{x}\varphi'(t)dt=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))dt\,.$$

逆に，関数 $\varphi(x)$ が式 (5.3) を満たせば，これが式 (5.2) の解になる．実際，式 (5.3) において，$x=x_0$ を代入すると，$\varphi(x_0)=y_0$ を得る．そして，式 (5.3) の両辺を x で微分すれば，式 (5.2) の第 1 式を得る．したがって，式 (5.2) の問題は，式 (5.3) を満たす連続関数 $\varphi(x)$ を見つけることと同値である．

式 (5.3) のように，未知関数の積分を用いて表わされる方程式を**積分方程式**という．φ は I 上で連続，f も D 上で連続．

定理が要請する関数 f についての条件は，次に示すリプシッツ連続である．

仮定 5.1.

f は**リプシッツ連続** (Lipschitz continuous) であるとする．つまり，

$\exists\,K>0\,,$

$\forall\,x\in[\,x_0-a\,,\ x_0+a\,]\,,\quad \forall\,y,\forall\,z\in[\,y_0-b\,,\ y_0+b\,]\,,$

$$|f(x,y)-f(x,z)|\leq K|y-z|\,. \tag{5.4}$$

注意 5.2. 仮定 5.1 において，K は**リプシッツ定数**と呼ばれる．

注意 5.3. 式 (5.4) において，$K < 1$ のとき，f は縮小写像である．したがって，縮小写像はリプシッツ連続の特別の場合である．

命題 5.1.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ が D 上で連続であるならば,

f はリプシッツ連続である.

証明

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|$ は D 上の連続関数であり，D はコンパクトである．よって，定理 2.2 より,

$$\exists\, K > 0\,, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K\,.$$

したがって,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,z)| &= \left|\int_z^y \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)dt\right| \\ &\leq K \left|\int_z^y dt\right| \\ &= K|y-z|\,. \end{aligned}$$

よって，f はリプシッツ連続である．

$\square$

注意 5.4. 実用上は，f は C^∞ 級であることが多いので，とくに問題となることはない.

本節での主定理は次の，ある条件のもとで，先の微分方程式 (5.1) が一意な解 φ をもつというものである.

定理 5.1.

f がリプシッツ連続であるならば,

ある δ が存在して，閉区間 $[\,x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,]$ 上で，微分方程式 (5.1) は一意な解をもつ.

証明

f は D 上の連続関数であり，D はコンパクトである．よって，定理 2.2 より，

$$\exists M > 0, \quad |f| \leq M .$$

また，仮定 5.1 より，

$$x \in [\, x_0 - a\,,\ x_0 + a\,],$$
$$y \in [\, y_0 - b\,,\ y_0 + b\,]$$

について，f はリプシッツ連続である．

以上が，f が満たす条件である．

いま，

$$I = [\, x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta\,] \subset [\, x_0 - a\,,\ x_0 + a\,]$$

とし，δ を次のように定める．

$$0 < \delta < \min\left\{a\,, \frac{b}{M}\,, \frac{1}{K}\right\} \tag{5.5}$$

上式を満たす任意の δ を一つ選んで固定する．なお，ここで，K はリプシッツ定数である．

$$E \equiv \{\varphi \in C(I) \mid |\varphi(x) - y_0| \leq M\delta\} \tag{5.6}$$

とおく．系 4.1 より，E は閉集合である．

作用素 T を，

$$T(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

と定義する．ここで，$T : E \to E$，つまり，

$$T(\varphi) \in E$$

を示さねばならない．

$T(\varphi)$ は，連続関数の定積分であるので，連続である．$T(\varphi) \in I$．また，

$$
\begin{aligned}
|T(\varphi) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt \right| \\
&\le M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \\
&= M \,|\, x - x_0 \,| \\
&\le M\delta\, .
\end{aligned}
$$

よって，E の定義式 (5.6) の条件を満たし，$T(\varphi) \in E$ を示すことができた.

以下，T が縮小写像であることを示す.

$\varphi, \psi \in E$ について，$\rho(T\varphi, T\psi)$ を考える.

$$
\begin{aligned}
\rho(T\varphi, T\psi) &= ||T\varphi - T\psi|| \\
&= \max_{x \in I} |T\varphi(x) - T\psi(x)| \\
&= \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t)) dt \right| \\
&= \max_{x \in I} \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))|\, dt \right| \\
&\le \max_{x \in I} K \left| \int_{x_0}^{x} |\varphi(t) - \psi(t)|\, dt \right| \\
&\qquad\qquad (\because\ f \text{ がリプシッツ連続}) \\
&= K \left| \int_{x_0}^{x} \max_{s \in I} |\varphi(s) - \psi(s)|\, dt \right| \\
&\le K \left| \int_{x_0}^{x} \max_{s \in [x_0 - a,\, x_0 + a]} |\varphi(s) - \psi(s)|\, dt \right| \\
&\qquad\qquad (\because\ I \subset [x_0 - a, x_0 + a]) \\
&= K \left| \int_{x_0}^{x} \rho(\varphi, \psi) dt \right| \\
&= K\rho(\varphi, \psi)\, |x - x_0| \\
&\le K\delta\, \rho(\varphi, \psi) \\
&\qquad\qquad (\because\ |x - x_0| \le \delta)\, .
\end{aligned}
$$

よって，

$$\rho(T\varphi, T\psi) \leq K\delta\, \rho(\varphi, \psi)\,.$$

式 (5.5) における δ のとり方から，$K\delta < 1$ である．したがって，T は縮小写像である．よって，縮小写像の不動点定理（定理 4.1）より，$T\varphi = \varphi$ となる $\varphi \in E$ が一意に存在する．

□

以上の解の存在と一意性の証明では，解の存在の保証される範囲が式 (5.5) に規定される定義域 I に限定されている．しかし，さまざまな方法によって解を延長することは可能である．

定理 5.1 は，解を近似する関数列を構成する方法も与えている．定理 5.1 の証明における作用素 T を用いて，積分方程式 (5.3) は，

$$\varphi = T(\varphi)$$

と表わすことができる．解は，縮小写像 T の不動点なのであった．前節で見たように，

$$\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

によって，$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots$ を順次計算し，その極限をとることで，解を求めることができる場合がある．このような解の構成法を例示することをもって本稿を締め括ることとしたい．

例 5.1.

$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$y(0) = 1\,.$$

の場合を考える．つまり，$f(x, y) = y$，$x_0 = 0$，$y_0 = 1$ の場合である．このとき，

$$T\,(\varphi) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$$

$$= 1 + \int_0^x \varphi(t)dt\,.$$

$\varphi_0 = 1$ から始めてみる.

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= T(\varphi_0) = 1 + \int_0^x dt = x + 1\,, \\
\varphi_2 &= T(\varphi_1) = 1 + \int_0^x (t+1)dt = \frac{x^2}{2} + x + 1\,, \\
\varphi_3 &= T(\varphi_2) = 1 + \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + t + 1\right)dt = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} + x + 1\,, \\
&\ \vdots \\
\varphi_n &= T(\varphi_{n-1}) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.
\end{aligned}$$

極限をとると,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

これは e^x にほかならない.

［参考文献］

[1] 奥口孝二, 経済分析の数学基礎, マグロウヒル, (1977).

[2] 齋藤利弥, 基礎常微分方程式論, 朝倉書店, (1979).

[3] 洲之内治男, 改訂 関数解析入門, サイエンス社, (1994).

[4] Ljungqvist, L., Sargent, T. J., *Recursive Macroeconomic Theory; 2nd edition*, MIT Pr, (1989).

[5] Sargent, T. J., *Recursive Methods in Dynamic Macroeconomic Theory*, Harvard Univ Pr, (1989).

[6] Stokey, N. L., Lucas, R. E., Jr. with Prescott, E. C., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard Univ Pr, (1989).