〈論　説〉

ルベーグ積分とその経済学における応用 (1)

松　井　柳　平

1　はじめに

時間を通じた動学的な経済問題を考察するに際して，関数方程式とくに自律系の差分方程式についての安定性の理論が重要である．そして不確実性といった確率的な要素を動学的な経済モデルに導入すると，確率差分方程式を扱うことになり，その安定性を議論するには，測度やルベーグ積分といった理論が基本的な分析ツールとして重要となってくる．ルベーグ積分の理論は確率的要素を伴う問題の議論を効率化することになろう．

また，経済学においてバナッハ空間の不動点定理などの関数解析に関する知識が必要となるが，関数解析の具体的な問題を取り扱うにはルベーグ積分を用いる必要がある．関数解析の威力を十分に発揮するには積分の概念をルベーグ積分にまで拡げねばならない．ルベーグ積分によって，可積分の関数の範囲が広がるのみならず，バナッハ空間などの関数解析の理論が厳密に展開でき，最適化問題などに応用されるに至っている．

ルベーグ積分を導入する仕方はさまざまあるが，まず測度を学び，次に積分を定義するのが，かなり面倒ではあるが，一般的である．本稿を含む数回にわたって論じていきたい．本稿ではルベーグ積分の導入に先立って測度を定義していくことにしたい．

本稿における命題の多くは，Stokey and Lucas [5] における Exercise を参考にしているが，それぞれの Exercise の題意自体をわかりやすく翻案し，書きなおしたほか，証明についても，Irigoyen et al [4] が証明を与えているが，

本稿ではそのほとんどについて独自に証明を考えた．また証明はわかりやすく丁寧に書いた．本稿は，Stokey and Lucas [5] 第 7 章に対するコメンタールとしても読むことができるだろう．末尾に掲げた他の文献も参考にしたが，理工系向けに書かれたそれらにおける叙述に比べ，理解しやすいものとなっていると考える．

2　可測空間

確率測度を特殊ケースとして含む測度は，関数として，何らかの集合の部分集合の族を定義域とする．まず，どのような部分集合の族が，測度の定義域として適切なのか，という問題を扱う．可測空間の定義に我々を導くことになる．

定義 2.1.　完全加法族

任意の集合 S について，S の任意の部分集合の集まりを $\mathscr{S}$ とする．$\mathscr{S}$ が完全加法族 (σ-algebra) であるとは，以下の 3 つをすべて満たす場合をいう．

(1) $\phi, S \in \mathscr{S}$,

(2) $A \in \mathscr{S} \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathscr{S}$,

(3) $A_i \in \mathscr{S}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ であるとき，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{S} \ . \tag{2.1}$$

命題 2.1.

完全加法族である $\mathscr{S}$ に対して，

$$A_i \in \mathscr{S} \ (i = 1, 2, \cdots) \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{S} \ . \tag{2.2}$$

証明

一般に，集合 S の部分集合の集まり $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について，

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \right)^c \tag{2.3}$$

が成り立つ．なぜならば，$x \in S$ について，

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \right)^c &\iff x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \\ &\iff \forall \lambda \in \Lambda, \quad x \notin A_\lambda^c \\ &\iff \forall \lambda \in \Lambda, \quad x \in A_\lambda \\ &\iff x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \end{aligned} \tag{2.4}$$

であるからである．

定義 2.1 の (2) より，$\forall i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $A_i \in \mathscr{S}$ であるとき，$\forall i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$, $(A_i)^c \in \mathscr{S}$ である．したがって，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathscr{S}.$$

したがって，定義 2.1 の (2) より，

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathscr{S}.$$

である．式 (2.3) において，$\Lambda = \mathbb{N} \backslash \{0\}$ として，

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathscr{S}.$$

□

以下，完全加法族の例を挙げる．

例 2.1.

任意の集合 S について $\mathscr{S} = \{\phi, S\}$ は完全加法族である．

定義 2.1 の (1) を満たしていることは自明．

定義 2.1 の (2) については，$\phi^c = S$, $S^c = \phi$ である．

定義 2.1 の (3) については，

(i) $A_i \subset S\,(i=1,2,\cdots)$ がすべて ϕ であるとき，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \phi \in \mathscr{S}\,,$$

(ii) $A_i \subset S\,(i=1,2,\cdots)$ が ϕ ではないものを含んでいるとき，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = S \in \mathscr{S}\,.$$

例 2.2.

任意の集合 S について $\mathscr{S} = 2^S$ は完全加法族である．（2^S は，$\{S$ のすべての部分集合$\}$ つまり S のべき集合）

定義 2.1 の (1) を満たしていることは自明.

定義 2.1 の (2) については，$A_i \subset S\,(i=1,2,\cdots)$ について，$A_i^c \subset S$ である.
ゆえに，$A_i^c \in \mathscr{S}$.

定義 2.1 の (3) については，$A_i \subset S\,(i=1,2,\cdots)$ について，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset S \text{ である．ゆえに，} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{S}\,.$$

定義 2.2.　**可測空間**

$\mathscr{S}$ を集合 S の部分集合の完全加法族であるとする.
$(S, \mathscr{S})$ を**可測空間**と呼ぶ.
集合 $A \in \mathscr{S}$ を，$\mathscr{S}$-**可測集合**，あるいは $\mathscr{S}$ が文脈上自明である場合は単に，**可測集合**と呼ぶ.

命題 2.2.

任意の集合 S について，$\mathscr{A}$ を S の任意の部分集合からなる集まりとする．$\{\mathscr{S}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって $\mathscr{A}$ を含むような完全加法族の全体を表わす．つまり，$\forall\lambda \in \Lambda$ について，

(i) $\mathscr{S}_\lambda \subset 2^S$,

(ii) $\mathscr{S}_\lambda \supset \mathscr{A}$,

(iii) $\mathscr{S}_\lambda$ は S の完全加法族.

このとき，$\mathscr{S} \equiv \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{S}_\lambda$ という S の部分集合の族を考えると，$\mathscr{S}$ は，

(a) $\mathscr{A}$ を含む

(b) S の完全加法族である

(c) $\mathscr{F}$ が $\mathscr{A}$ を含む S の完全加法族 $\Longrightarrow$ $\mathscr{F} \supset \mathscr{A}$

証明

(a)　(ii) より，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{S}_\lambda \supset \mathscr{A}$

(b)　$\mathscr{S}$ が完全加法族の定義 2.1 の (1)–(3) を満たしていることを調べる．

(1) $\mathscr{S}_\lambda$ は完全加法族であるから，$\forall\lambda \in \Lambda,\ \phi, S \in \mathscr{S}_\lambda$ である．よって，

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{S}_\lambda \ni \phi, S\ .$$

(2) $A \subset S$ が $A \in \mathscr{S} = \bigcap \mathscr{S}_\lambda$ であるとする．このとき，$\forall\lambda \in \Lambda$，$A \in \mathscr{S}_\lambda$ である．$\mathscr{S}_\lambda$ は完全加法族であるから，$A^c \in \mathscr{S}_\lambda$ である．ゆえに，

$$\forall\lambda \in \Lambda,\ A^c \in \mathscr{S}_\lambda \quad \Longrightarrow \quad \mathscr{S} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{S}_\lambda \ni A^c .$$

(3) $\mathscr{A}$ を含むすべての完全加法族の交わり $\mathscr{S} = \bigcap \mathscr{S}_\lambda$ が

$$\forall A_i \in \mathscr{S}\ (i = 1, 2, \cdots)\ \text{について，}\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{S}$$

であることを示す．

$\mathscr{S} = \bigcap \mathscr{S}_\lambda$ であることに注意すると，$\forall A_i \in \mathscr{S}\ (i = 1, 2, \cdots)$ であれば，任意の A_i は，$\mathscr{A}$ を含む完全加法族 $\mathscr{S}_\lambda$ すべて $(\lambda \in \Lambda)$ の要素である．したがって，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は，すべての $\mathscr{S}_\lambda$ の要素であり，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{S}\ .$$

(c)　$\exists\lambda_0 \in \Lambda$，$\mathscr{F} = \mathscr{S}_{\lambda_0}$ である．よって，

$$\mathscr{S} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{S}_\lambda \subset \mathscr{S}_{\lambda_0} = \mathscr{F}$$

□

この命題 2.2 は，(a)–(c) より明らかなように，

$\mathscr{A}$ を含むすべての完全加法族の交わり（共通部分）$\mathscr{S} = \bigcap \mathscr{S}_\lambda$ は，

$\mathscr{A}$ を含む完全加法族である（Stokey and Lucas [5] における Exercise 7.1）

ということを示している．つまり，$\mathscr{A}$ を含む最小の完全加法族である．これはしばしば，$\mathscr{A}$ が生成する完全加法族 (the σ-algebra generated by $\mathscr{A}$) と呼ばれる．

次の補題において，$\mathscr{A}$ はすべての開区間の集まりである．

補題 2.1.

$S = \mathbb{R} = \mathbb{R}^1$,

$$\begin{aligned}\mathscr{A} \ &= \{(-\infty, b) \subset \mathbb{R} \mid \forall\, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid \forall\, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\} \\ &\cup \{(a, \infty) \subset \mathbb{R} \mid \forall\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

$\mathscr{S}$ を，$\mathscr{A}$ を含むような $\mathbb{R}$ の完全加法族であるとする．

このとき，$\mathbb{R}$ の閉区間はすべて $\mathscr{S}$ の元（要素）である．

証明

(1) $F_1 = (-\infty, b]$ $(b \in \mathbb{R})$ という閉区間について，

$O_1 = (b, \infty)$ とおくと，$O_1 \in \mathscr{A}$．したがって，$O_1 \in \mathscr{S}$．

$\mathscr{S}$ は完全加法族であるから，$O_1^c \in \mathscr{S}$．ところで，$O_1^c = F_1$ であるから，

$F_1 \in \mathscr{S}$．

(2) $F_2 = [a, \infty)$ $(a \in \mathbb{R})$ という閉区間について，

$O_2 = (-\infty, a) \in \mathscr{A} \subset \mathscr{S}$．

よって，$F_2 = O_2^c \in \mathscr{S}$．

(3) $F_3 = [a, b]$ $(a,\ b \in \mathbb{R},\ a \leq b)$ という閉区間について，

2 通りの証明を与える．

証明 1)　$O_3 = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ とすると，

$(-\infty, a), (b, \infty) \in \mathscr{S}$ であるから，$(-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \mathscr{S}$

つまり，$O_3 \in \mathscr{S}$ であり，よって，$F_3 = O_3^c \in \mathscr{S}$.

証明 2)　命題 2.2 より，

$$F_3 = [a, b] = (-\infty, b] \cap [a, \infty) \in \mathscr{S} .$$

(4) $F_4 = (-\infty, \infty]$ という閉区間について，

$$F_4 \in \mathscr{A} \subset \mathscr{S}$$

□

この補題 2.1 より，すべての開区間を含む完全加法族は，すべての閉区間も含む，ということがわかった.

定義 2.3.

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ のボレル集合族 (Borel algebra) とは，

$\mathbb{R}$ のすべての開区間を含む完全加法族のなかで最小のもの

であり，$\mathscr{B}^1$ と表わす.

$\mathbb{R}$ の部分集合であり，$\mathscr{B}^1$ の元は，ボレル集合と呼ばれる.

いま $\mathbb{R}$ のボレル集合族を定義したが，一般の集合（距離空間，位相空間）X についても，X のボレル集合族は，X のすべての開集合を含む最小の完全加法族として定義される.

例えば，ユークリッド距離をもつ高次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ については，適当な半径をもつ開球体すべてを含む最小の完全加法族として，$\mathbb{R}^l$ のボレル集合族 $\mathscr{B}^l$ を定義することができる.

命題 2.3.

$\mathscr{B}^1$ は，閉区間が生成する完全加法族でもある.

つまり，$\mathbb{R}$ のすべての閉区間を含む完全加法族のなかで最小のものである.

証明

閉区間が生成する完全加法族を，$\mathscr{F}$ で表わす.

$\mathscr{F} = \mathscr{B}^1$ を示す．そのためには，$\mathscr{F} \subset \mathscr{B}^1$ と $\mathscr{F} \supset \mathscr{B}^1$ を示せばよい．
まず，$\mathscr{F} \subset \mathscr{B}^1$ を示す．
$\mathscr{B}^1$ が，すべての開区間の集まりを含む $\mathbb{R}$ の完全加法族であることから，補題 2.1 より，$\mathscr{B}^1$ はすべての閉区間を含む．
ところで，$\mathscr{F}$ はすべての閉区間を含む最小の完全加法族である．よって，$\mathscr{F} \subset \mathscr{B}^1$．
次に，$\mathscr{F} \supset \mathscr{B}^1$ を示す．
定義より，$\mathscr{B}^1$ はすべての開区間を含む最小の完全加法族である．$\mathscr{F}$ がすべての開区間もまた含むということを示せばよい．

(1) $O_1 = (-\infty, b)$ $(b \in \mathbb{R})$ という開区間について，
$F_1 = [b, \infty)$ とおくと，$F_1 \in \mathscr{F}$．$\mathscr{F}$ は完全加法族であるから，$F_1^c = O_1 \in \mathscr{F}$．

(2) $O_2 = (a, \infty)$ $(a \in \mathbb{R})$ という開区間について，
$F_2 = (-\infty, a]$ とおくと，$F_2 \in \mathscr{F}$．$\mathscr{F}$ は完全加法族であるから，$F_2^c = O_2 \in \mathscr{F}$．

(3) $O_3 = (a, b)$ $(a,\ b \in \mathbb{R},\ a < b)$ という開区間について，
$F_3 = (-\infty, a] \cup [b, \infty)$ とすると，
$F_3 \in \mathscr{F}$．$\mathscr{F}$ は完全加法族であるから，$(-\infty, a] \in \mathscr{F}$，$[b, \infty) \in \mathscr{F}$，$F_3 \in \mathscr{F}$，$F_3^c = O_3 \in \mathscr{F}$．

(4) $O_4 = (-\infty, \infty] = F_4$ とおける．
$F_4 \in \mathscr{F}$ なので，$F_4 = O_4 \in \mathscr{F}$

　以上より，$\mathscr{F}$ は，すべての開区間も含む．
$\mathscr{B}^1$ はすべての開区間を含む最小の完全加法族であるから，$\mathscr{B}^1 \subset \mathscr{F}$．
　以上より，$\mathscr{B}^1 = \mathscr{F}$．つまり，$\mathscr{B}^1$ はすべての閉区間を含む最小の完全加法族でもある．

□

命題 2.4.
$\mathscr{B}^1$ はすべての半開区間を含む最小の完全加法族と等しい．

証明

すべての半開区間を含む最小の完全加法族を，$\mathscr{H}$ によって表わす．

以下，対称性より一般性を失うことなく，$(a,b]$ のかたちの半開区間を中心にして考える．

(a) $\mathscr{B}^1 \supset \mathscr{H}$ を示す．

そのために，$\mathscr{B}^1$ が，すべての半開区間を含むことを示す．

$$H=(a,b]\in\mathscr{H} \quad (a,b\in\mathbb{R}, a<b)$$

とおくと，

$$H^c=(-\infty,a]\cup(b,\infty)\,.$$

補題 2.1 より，$\mathscr{B}^1$ はすべての閉区間を含むから，

$$(-\infty,a]\in\mathscr{B}^1\,.$$

$\mathscr{B}^1$ の定義から，$(b,\infty)\in\mathscr{B}^1$．

$\mathscr{B}^1$ は完全加法族であるから，

$$(-\infty,a]\cup(b,\infty)=H^c\in\mathscr{B}^1\,.$$

また，$(H^c)^c=H\in\mathscr{B}^1$．よって，$\mathscr{B}^1$ は，すべての半開区間を含み，$\mathscr{B}^1\supset\mathscr{H}$．

(b) $\mathscr{B}^1 \subset \mathscr{H}$ を示す．

そのために，$\mathscr{H}$ が，すべての開区間を含むことを示す．

$$H_1=(a,b]\in\mathscr{H}\,,\ H_2=[c,d)=\{(-\infty,c)\cup[d,\infty)\}^c\in\mathscr{H}\,,$$
$$(a,b,c,d\in\mathbb{R},\ a<b,\ c<d)$$

とおく．$\mathscr{H}$ は完全加法族であるから，$a<c\leq b<d$ の場合，

$$(a,d)=H_1\cup H_2=H_1\cup\{(-\infty,c)\cup[d,\infty)\}^c\in\mathscr{H}\,.$$

したがって，$\mathscr{H}$ はすべての開区間を含む．$\mathscr{B}^1$ はすべての開区間を含む

最小の完全加法族であるから，$\mathscr{B}^1 \subset \mathscr{H}$.

以上より，$\mathscr{B}^1 = \mathscr{H}$. つまり，$\mathscr{B}^1$ はすべての半開区間が生成する完全加法族である.

□

命題 2.5.

$\mathscr{B}^1$ はすべての半直線 (half rays) を含む最小の完全加法族と等しい.

証明

すべての半直線を含む最小の完全加法族を，$\mathscr{R}$ によって表わす.

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \in \mathscr{R} .$$

(a) $\mathscr{B}^1 \supset \mathscr{R}$ を示す.

そのために，$\mathscr{B}^1$ が，すべての半直線を含むことを示す. $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ 開区間なので，$\mathscr{B}^1$ は，すべての半直線を含む. よって，$\mathscr{B}^1 \supset \mathscr{R}$.

(b) $\mathscr{B}^1 \subset \mathscr{R}$ を示す.

そのために，$\mathscr{R}$ が，すべての半開区間を含むことを示す.

$$\begin{aligned}(a, b] &= (-\infty, b] \cap [a, \infty) \quad (a < b) \\ &= (b, \infty)^c \cap (a, \infty) .\end{aligned}$$

ここで，$\mathscr{R}$ は完全加法族であるから，

$$(b, \infty)^c \in \mathscr{R} ,\ (a, \infty) \in \mathscr{R} ,\ (b, \infty)^c \cap (a, \infty) \in \mathscr{R} .$$

よって，$(a, b] \in \mathscr{R}$. 命題 2.4 より，$\mathscr{B}^1$ はすべての半開区間を含む最小の完全加法族であるから，$\mathscr{B}^1 \subset \mathscr{R}$.

以上より，$\mathscr{B}^1 = \mathscr{R}$. つまり，$\mathscr{B}^1$ はすべての半直線が生成する完全加法族である.

□

上記の命題 2.3, 2.4, 2.5 は，Stokey and Lucas [5] における Exercise 7.2 に相当する.

命題 2.6.

$S \in \mathscr{B}^l$ のとき，

$$\mathscr{B}_S = \{A \in \mathscr{B}^l \mid A \subseteq S\}$$

は S の完全加法族である．

証明

定義 2.1 における 3 つの要件 (1)–(3) を，$\mathscr{B}_S$ が満たすことを明らかにする．

(1) S の部分集合として，$\phi, S \subset S$ であり，$\mathscr{B}^l$ は $\mathbb{R}^l$ の 1 つの完全加法族なので，$\phi \in \mathscr{B}^l$ である．また条件より，$S \in \mathscr{B}^l$．

(2) $\forall A \in \mathscr{B}_S$ について，$A^c = S \backslash A$ を考える．$A^c = S \backslash A \subseteq S$ である．また，$A^c = S \backslash A = S \cap \mathbb{R}^l \backslash A$．
条件より $S \in \mathscr{B}^l$．また $A \in \mathscr{B}^l$ なので，$\mathbb{R}^l \backslash A \in \mathscr{B}^l$．
$\mathscr{B}^l$ は完全加法族であるから，$A^c = S \cap \mathbb{R}^l \backslash A \in \mathscr{B}^l$．

(3) $A_i \in \mathscr{B}_S$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とする．$\mathscr{B}^l$ が完全加法族であること，及び，$\mathscr{B}_S \subset \mathscr{B}^l$ であることから，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{B}^l$．
また，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ は S の部分集合である ($\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq S$)．以上より，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{B}_S$．

□

3　測度

可測空間 $(S, \mathscr{S})$ が与えられると，$\mathscr{S}$ に属するすべての集合に対して，測度と呼ばれる実数値を割り当てることになる．ここでの実数値は $+\infty$ を含むように拡張される．

定義 3.1.　測度

$(S, \mathscr{S})$ を可測空間とする．

以下の (a)–(c) を満たす拡張された実数値関数 $\mu : \mathscr{S} \to \bar{\mathbb{R}}$ を**測度** (measure) と呼ぶ．

(a) $\mu(\phi) = 0$，

(b) $\mu(A) \geq 0\,, \forall A \in \mathscr{S}$,

(c) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が可算，互いに素な，$\mathscr{S}$ に属する部分集合の列であるときには，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

注意 3.1. 上の定義において，$\bar{\mathbb{R}}$ とは，拡張された実数の集合であり，

$$\bar{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$$

である．

定義 3.2.　**有限測度**

$\mu(S) < +\infty$ であるとき，μ は有限測度と呼ばれる．

定義 3.3.　**測度の単調性**

$$A_1\,,\ A_2\ \in \mathscr{A}\ \text{かつ}\ A_1\ \subset\ A_2 \quad \Longrightarrow \quad \mu(A_1)\ \leq\ \mu(A_2)$$

が成り立つとき，$\mathscr{A}$ 上の測度 μ は**単調**であるという．

測度空間における測度の単調性は，以下の命題 3.3 において証明する．

定義 3.4.　**測度空間**

測度空間 (measure space) $(S, \mathscr{S}, \mu)$ とは，

集合 S,

S の部分集合の完全加法族 $\mathscr{S}$,

$\mathscr{S}$ 上で定義される測度 μ

からなる組である．

注意 3.2. $\mu(S) = 1$ であるとき，$(S, \mathscr{S}, \mu)$ は確率空間，μ は確率測度と呼ばれる．

注意 3.3. 可測空間 $(S,\mathscr{S})$ が与えられたときに，$(S,\mathscr{S},\mu)$ が測度空間となるような測度 μ が存在するかどうかについてであるが，以下のような測度 μ_0, μ_∞ は，どのような可測空間 $(S,\mathscr{S})$ に対しても測度として定義できる．

$$\begin{aligned} \mu_0(A) &= 0 \quad ; \quad \forall A \in \mathscr{S} \\ \mu_\infty(A) &= \begin{cases} 0 & ; \quad A = \phi \\ \infty & ; \quad A \neq \phi \end{cases} \end{aligned}$$

例 3.1. **個数測度**

次の測度 $\mu_\sharp$ も，どのような可測空間 $(S,\mathscr{S})$ に対しても測度として定義できる．

$$\mu_\sharp(A) = \sum_{n \in A} 1 \ , \quad \mu_\sharp(\phi) = 0 \ ,$$

A が無限集合である場合には，A が可算，非可算を問わず，

$$\mu_\sharp(A) = \infty$$

と定める．言い換えると，

$$\mu_\sharp(A) = \begin{cases} \sharp A & ; \quad \sharp A < \infty \\ \infty & ; \quad \sharp A = \infty. \end{cases}$$

このような測度 $\mu_\sharp$ は**個数測度** (counting measure) と呼ばれる．

この $\mu_\sharp$ が可測空間 $(S,\mathscr{S})$ の測度となることを示す．

まず，$\sharp\phi = 0$ なので，$\mu_\sharp(\phi) = 0$．

また，すべての $A \in \mathscr{S}$ について，$\mu_\sharp(A) \geq 0$．

$$\because \quad \mu_\sharp(A) = \begin{cases} \sharp A \geq 0 & ; \quad \sharp A < \infty \\ \infty > 0 & ; \quad \sharp A = \infty. \end{cases}$$

次に，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，可算で互いに素な，$\mathscr{S}$ に属する部分集合 A_n の列とする．それぞれの A_n は互いに素なので，

$$\begin{aligned}\sharp\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sharp A_1 + \sharp A_2 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sharp A_n\,.\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\mu_\sharp\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\sharp(A_n)\,.$$

定義 3.5.

測度空間 $(S, \mathscr{S}, \mu)$ において，$A \in \mathscr{S}$ であるとする．

$x \in A$ についての命題 $P(x)$ が存在して A 上の**ほとんどいたるところで** ($a.e.$; almost everywhere) 成り立つとは,

$$A_1 = \{x \in A \mid \text{命題 } P(x) \text{ が偽となる }\}$$

としたとき,

$$\mu(A_1) = 0$$

となっていることを表わす.

　この定義を言い換えれば,

$$\text{「} A_2 = \{x \in A \mid \text{命題 } P(x) \text{ が真となる }\}$$

としたとき,

$$\mu(A \backslash A_2) = 0\,.\text{」}$$

$$\iff \quad \text{「 命題 } P(x) \text{ は } a.e.\ \ x \in A \text{ で成り立つ．」}$$

注意 3.4.「ほとんどいたるところで」の文言は,「μ についてほとんどいたるところで」(μ-almost everywhere) と書く場合もある．この場合，μ-$a.e.$ と略される.

注意 3.5. 測度空間が確率空間である場合は,「ほとんどいたるところで ($a.e.$)」の代わりに,「ほとんど確実に ($a.s.$; almost surely)」が用いられる場合がある.

確率測度をもつ確率空間においては,「命題 $P(x)$ は $a.e.$ $x \in A$ で成り立つ」とは，A 上では確率 1 で命題 $P(x)$ が成り立つことを意味する.

以下の命題 3.1, 3.2 は，ルベーグの収束定理のひとつである単調収束定理を証明するに際して，そのための補題の証明において用いられる.

命題 3.1.

可測空間 $(S, \mathscr{S})$ 上の測度 μ_1, μ_2 について,

$$\lambda : \mathscr{S} \to \bar{\mathbb{R}}, \quad \lambda(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A)$$

は，$(S, \mathscr{S})$ 上の測度である.

証明

定義 3.1 における 3 つの要件 (a)–(c) を，λ が満たすことを明らかにする.

(a) μ_1, μ_2 は測度であるから，$\mu_1(\phi) = 0$，$\mu_2(\phi) = 0$. したがって,

$$\lambda(\phi) = 0 + 0 = 0\,.$$

(b) μ_1, μ_2 は測度であるから，$\mu_1(A) \geq 0$，$\mu_2(A) \geq 0$. したがって,

$$\lambda(A) = \mu_1(A) + \mu_2(A) \geq 0\,.$$

(c) 互いに素な，$\mathscr{S}$ の部分集合の族 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\,.$$

を示す.

λ の定義により,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + \mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n) . \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1(A_n) + \mu_2(A_n)) . \tag{3.2}$$

よって，

(i) $\sum \mu_1(A_n) < \infty$，$\sum \mu_2(A_n) < \infty$ のとき，

これらは絶対収束なので，和の順序をどのように交換してもよい．したがって，

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) .$$

(ii) $\sum \mu_1(A_n)$，$\sum \mu_2(A_n)$ の少なくともいずれか一方が発散するとき，

対称性から，$\sum \mu_1(A_n)$ が発散する場合を考えれば十分．このとき，式 (3.1) より，

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) = \infty .$$

ゆえに，$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$．

また，$\mu_1(A_n) + \mu_2(A_n) \geq \mu_1(A_n)$ であるから，式 (3.2) は，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1(A_n) + \mu_2(A_n)) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n) = \infty .$$

よって，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \infty$．

$\infty = \infty$ という意味で，

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) .$$

□

注意 3.6. 有限の和については，足す順番を入れ替えても同じなので，$\sum$ の線形性が成り立つ．

無限和については，順序を変えると結果が変わってしまうことがありうる．

命題 3.1 については，$\mu_i(A_n) \geq 0$ なので，$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_i(A_n) < \infty$ であれば絶対収束していることになる．絶対収束していれば，足す順番を入れ替えても同じなので，$\sum$ の線型性が成り立つ．

上記の命題 3.1 は，Stokey and Lucas [5] における Exercise 7.4a に相当する．Irigoyen et al [4] における証明においては絶対収束の議論について言及はない．

以下に絶対収束の定義を与えておく．

定義 3.6.　**絶対収束**

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ について，$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ が収束するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ は**絶対収束**するという．

命題 3.2.

$B \in \mathscr{S}$ とする．可測空間 $(S, \mathscr{S})$ 上の測度 μ_1 について，

$$\lambda : \mathscr{S} \to \bar{\mathbb{R}}, \quad \lambda(A) = \mu_1(A \cap B)$$

は，$(S, \mathscr{S})$ 上の測度である．

証明

定義 3.1 における 3 つの要件 (a)–(c) を，λ が満たすことを明らかにする．

(a) $\lambda(\phi) = \mu_1(\phi \cap B) = \mu_1(\phi) = 0$.

(b) μ_1 は $(S, \mathscr{S})$ 上の測度であるから，$\lambda(A) = \mu_1(A \cap B) \geq 0$.

(c) 互いに素な，$\mathscr{S}$ の部分集合の族 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu_1\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \cap B\right) \\
&= \mu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \cap B]\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1\left(A_n \cap B\right) \\
&\quad (\because \text{ 集合 } \{A_n \cap B\}(n = 1, 2, \cdots) \text{ は互いに素})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

□

命題 3.3.

測度空間 $(S, \mathscr{S}, \mu)$, $A, B \in \mathscr{S}$ について，

(1)　$A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$,

(2)　$A \subseteq B,\ \mu(A) < \infty \implies \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

証明

(1)　$A \subseteq B$ 及び $\mathscr{S}$ は完全加法族であることから，

$$C \equiv B \backslash A = B \cap A^c \in \mathscr{S}.$$

また，$A \cup C = B$ かつ $A \cap C \neq \phi$. したがって，

$$\mu(A \cup C) = \mu(A) + \mu(C) = \mu(B). \tag{3.3}$$

$\mu(C) \geq 0$ なので，上式より，$\mu(A) \leq \mu(B)$.

(2)　$\mu(A) < \infty$ が加わると，$\mu(B) - \mu(A)$ は $\infty - \infty$ の不定形にはならない．式 (3.3) より，$\mu(B \backslash A) = \mu(C) = \mu(B) - \mu(A)$

□

上記の命題 3.3 は，Stokey and Lucas [5] における Exercise 7.5 に相当する．Irigoyen et al [4] による証明では，$\mu(B) - \mu(A)$ は「well defined」である，という言葉が使われている.「関数が well defined である」とは，関数値が一意に決まることを表わす．実際，関数値の一意性が成り立たないとすれば，それは関数の定義に反することになる．

補題 3.1.

集合 S について，$\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，S の部分集合の増加列 $(A_n \supset A_{n-1})$ とする．

$A_0 = \phi$ とする．

$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくと，

(i) $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は互いに素.

(ii) $\bigcup B_n = \bigcup A_n$.

証明

(i) $\forall n, m \geq 1$ に対して,

$$n \neq m \quad \Longrightarrow \quad B_n \cap B_m = \phi$$

を示す．一般性を失うことなく，$n > m$ で考えてよい.

$B_n \cap B_m \neq \phi$ と仮定して矛盾を導く．$x \in B_n \cap B_m$ とする.

$$x \in B_n \iff x \in A_n \setminus A_{n-1} \implies x \notin A_{n-1} \tag{3.4}$$

$$x \in B_m \iff x \in A_m \setminus A_{m-1} \implies x \in A_m \tag{3.5}$$

$n > m$ より，$n - 1 \geq m$.

よって，$A_{n-1} \supset A_m$.

これは式 (3.4), (3.5) に矛盾.

(ii) $\forall n$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1} \subset A_n$. ゆえに，$\bigcup B_n \subset \bigcup A_n$.

次に，逆の包含関係を示す.

$x \in S$ について,

$$\begin{aligned} x \in \bigcup A_n &\iff \exists n \geq 0 ,\ x \in A_n \\ &\iff \exists n \geq 0 ,\ x \in B_1 \cup \cdots \cup B_n \\ &\iff \exists n \geq 0 ,\ x \in \bigcup_{k=1}^{n} B_k \\ &\implies x \in \bigcup B_n . \end{aligned}$$

したがって，$\bigcup B_n \supset \bigcup A_n$.

以上より，$\bigcup B_n = \bigcup A_n$.

□

この補題 3.1 は, 次の定理 3.1 の証明において用いられる．Stokey and Lucas [5] においては，この補題 3.1 の命題を，証明を省略して単調連続性の証明に

用いている．しかし，補題 3.1 の命題は証明すべきことと考え，本稿では補題として掲げて証明をおこなった．

定理 3.1.　**単調連続性**

$(S, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$\mathscr{S}$ に属する集合の増加列 ($A_{n+1} \supset A_n$) とする．
このとき，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) .$$

証明

$\mu(A_n) = \infty$ のとき自明なので，$\forall n$，$\mu(A_n) < \infty$ の場合を考える．

$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$，$A_0 = \phi$ とおく．補題 3.1(ii) より，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) .$$

補題 3.1(i) より $\{B_n\}$ は互いに素であるから，

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \backslash A_{n-1}\right) .\end{aligned}$$

$\mu(A_n) < \infty$ であり，したがって命題 3.3 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n \backslash A_{n-1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\mu\left(A_n\right) - \mu\left(A_{n-1}\right)\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left\{\mu\left(A_n\right) - \mu\left(A_{n-1}\right)\right\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \{\mu(A_1) - \mu(A_0) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \cdots \\ &\quad \cdots + \mu(A_N) - \mu(A_{N-1})\} \\ &= \lim_{N\to\infty} \big(\mu(A_N) - \mu(A_0)\big)\end{aligned}$$

$A_0 = \phi$ なので，

$$\lim_{N\to\infty}\big(\mu(A_N)-\mu(A_0)\big) = \lim_{N\to\infty}\mu(A_N)$$

以上より，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(A_n)\,.$$

□

定理 3.2.

$(S, \mathscr{S}, \mu)$ を測度空間とする．$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$\mathscr{S}$ に属する集合の減少列 $(B_{n+1} \subset B_n)$ とし，

ある m について $\mu(B_m) < \infty$ とする．

このとき，

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\,.$$

証明

一般性を失うことなく，$\mu(B_1) < \infty$ と仮定してよい．

ド・モルガンの法則より，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_n) = B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\,.$$

したがって，

$$\mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_n)\right)\,.$$

また，$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{S}$ に属する減少列であるから，$\{B_1 \setminus B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathscr{S}$ に属する増加列である．よって，定理 3.1 より，

$$\mu\left(B_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \setminus B_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(B_1 \setminus B_n)\,.$$

命題 3.3 より，上式は，

$$\mu(B_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \mu(B_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(B_n)\,.$$

よって，

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)\,.$$

□

上記の定理 3.2 に関連して，$\forall m$ について $\mu(B_m)=\infty$ のとき，

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)\,.$$

が成り立たない例を示しておく．

まず，測度として，例 3.1 の個数測度 $\mu_\sharp$ を考える．つまり，

$$\mu_\sharp(A) = \begin{cases} \sharp A & ; \quad \sharp A < \infty \\ \infty & ; \quad \sharp A = \infty. \end{cases}$$

$B_n = \left(0, \dfrac{1}{n}\right] \in \mathbb{R}^1$ は減少列である．B_n 自体は ϕ に収束するので，

$$\mu_\sharp\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = 0$$

であるが，$\mu_\sharp(B_n)=\infty$ は 0 に収束しない．

定義 3.7.

任意の集合 S について，S の任意の部分集合の集まりを $\mathscr{A}$ とする．$\mathscr{A}$ が有限加法族 (algebra) であるとは，以下の 3 つをすべて満たす場合をいう．

(1) $\phi, S \in \mathscr{A}$,

(2) $A \in \mathscr{A} \quad \Longrightarrow \quad A^c = S \setminus A \in \mathscr{A}$,

(3) $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$ であるとき，

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{A}\ . \tag{3.6}$$

注意 3.7. 互いに素な集合どうしの和集合を表わす場合に，$\cup$ の代わりに $\amalg$（直和）の記号を用いる場合がある．

「有限個の和集合」と言うとき，「有限個（の集合）の和集合」を意味する．

命題 3.4.

$\mathbb{R}$ の部分集合の族 $\mathscr{A}$, $\mathscr{D}$ を以下のように定める．

$\mathscr{A} = \{\ (-\infty, b], (a, b], (a, \infty), (-\infty, \infty)$ のかたちをしたものの有限個の和集合や補集合で表わされるような $\mathbb{R}$ の部分集合の全体$\}$

$\mathscr{D} = \{\ (-\infty, b], (a, b], (a, \infty), (-\infty, \infty)$ のかたちをしたものの**互いに素な**有限個の和集合（有限個の直和）で表わされるような $\mathbb{R}$ の部分集合の全体$\}$

このとき，

(1) $\mathscr{A} = \mathscr{D}$

(2) $\mathscr{D}$ は有限加法族

証明

(1) $\mathscr{A} \supset \mathscr{D}$ は当たり前なので，$\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ を示す．つまり，任意の $\mathscr{A}$ の元が $\mathscr{D}$ の元であることを示す．

(i) 補集合について

$$\begin{aligned}(-\infty, b]^c &= (b, \infty)\ \in \mathscr{D}, \\ (a, b]^c &= (-\infty, a] \cup (b, \infty) \\ &= (-\infty, a] \perp\!\!\!\perp (b, \infty)\ \in \mathscr{D}, \\ (a, \infty)^c &= (-\infty, a]\ \in \mathscr{D}, \\ (-\infty, \infty)^c &= \phi\ \in \mathscr{D}.\end{aligned}$$

互いに素な有限個の和集合をゼロ個の和集合と考えれば，$\phi\ \in \mathscr{D}$.

(ii) 和集合について

いま，有限個の和集合を考えており，和集合をとる順序は任意に代えてよい．

$(-\infty, \infty)$ を含む和集合は全体 $\mathbb{R}$ であるから $\mathscr{D}$ の元である．

よって，

$$\left(\bigcup_{k=1}^{l} (-\infty, b_k\,]\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (c_k, d_k\,]\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, \infty)\right) \tag{3.7}$$

というかたちの元が $\mathscr{D}$ の元であることを示せばよい．

$l=0,\ m=0$ または $n=0$ であればそれぞれの項は ϕ.

式 (3.7) は $(-\infty,b],(a,b],(a,\infty),(-\infty,\infty)$ のかたちをしたものの互いに素な有限個の和集合（有限個の直和）で表わすことができる．ゆえに $\mathscr{D}$ の元.

(2)　互いに素な有限個の和集合をゼロ個の和集合と考えれば，$\phi\in\mathscr{D}$.

$\mathscr{D}$ の定義から，$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}\in\mathscr{D}$ であり，また，有限個の和集合についても閉じている．

また，前記の (1) の証明の通り，補集合についても閉じている．

$\therefore$ $\mathscr{D}$ は有限加法族.

□

この命題 3.4 より，この命題における $\mathscr{A}$ は有限加法族であること（Stokey and Lucas [5] における Exercise 7.6a）がわかった．

命題 3.5.

ボレル集合族 $\mathscr{B}^1$ は，命題 3.4 における $\mathscr{A}$ を含む最小の完全加法族である．

証明

$\mathscr{A}$ を含む最小の完全加法族を $\mathscr{T}$ とおく．

命題 2.4 において明らかにしたように，$\mathbb{R}^1$ のボレル集合族 $\mathscr{B}^1$ は，すべての $(a,b]$ のかたちをした半開区間を含む最小の完全加法族である．したがって，$\mathscr{B}^1\subset\mathscr{T}$.

$\mathscr{B}^1$ は，半開区間を含み，半開区間の補集合や有限個（どころか無限）の和集合について閉じている．したがって，$\mathscr{B}^1\supset\mathscr{A}$ であり，$\mathscr{B}^1\supset\mathscr{T}$.

以上より，$\mathscr{B}^1=\mathscr{T}$.

□

この命題 3.5 は，Stokey and Lucas [5] における Exercise 7.6b に相当する．

定義 3.8.　**有限加法族上の測度**

S を集合とし，S の部分集合の有限加法族を $\mathscr{A}$ とする．

$\mathscr{A}$ 上の測度を，以下の (a)–(c) を満たす実数値関数 μ によって定義する．

(a) $\mu(\phi) = 0\,,$

(b) $\mu(A) \geq 0\,, \forall A \in \mathscr{A}\,,$

(c) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathscr{A}$ に属する集合の互いに素な列で，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{A} \tag{3.8}$$

であるときには，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

注意 3.8.　完全加法族 $\mathscr{S}$ においては，つねに

$$\forall A_n \in \mathscr{S}\,, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{S}$$

であるが，有限加法族 $\mathscr{A}$ においては，$A_n \in \mathscr{A}$ であるような $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，一般に式 (3.8) が成り立つわけではない．しかし，式 (3.8) を満たす $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，完全加法族におけるように，

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)\,.$$

を満たす μ を測度と定めている．

つまり，式 (3.8) が成り立つ場合にのみ，有限加法族に対しては，互いに素な集合の可算（無限）個の和集合の測度が定義される．

◇　◇　◇

さて，以上で準備した諸概念を用いて次に何を導くか，これを簡潔に説明して本稿を終えることとし，続きは稿を改め次回に呈示することとしたい．

集合として $\mathbb{R}$ を考えるとき，$\mathbb{R}$ の完全加法族 $\mathscr{S}$ としては，すべての開区間，閉区間，半開区間を含んでいるものが望ましい．つまり，$\mathscr{S}$ としては，$\mathscr{B}^1$ を含む完全加法族を考えたい．そしてその測度としては，

$$\mu\big((a,b)\big) = \mu\big((a,b]\big) = \mu\big([a,b)\big) = \mu\big([a,b]\big) = b - a \tag{3.9}$$

つまり，$(a,b) \in \mathbb{R}$ (あるいは $(a,b], [a,b), [a,b]$) の「長さ」が $b-a$ となるような測度を構成したい．

あるいは，集合として $\mathbb{R}^l$ を考えるとき，$\mathbb{R}^l$ の完全加法族 $\mathscr{S}$ としては，$\mathbb{R}^l$ のすべての開集合，閉集合を含んでいるものが望ましい．つまり，$\mathscr{S}$ としては，$\mathscr{B}^1$ を含む完全加法族を考えたい．そしてその測度としては，

$$\mu\left(\prod[a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{l}(b_i - a_i) \tag{3.10}$$

つまり，$\prod[a_i, b_i] \in \mathbb{R}^l$ の「体積」が $\prod_{i=1}^{l}(b_i - a_i)$ となるような測度を構成したい．

このような測度 μ は，$\mathbb{R}$ 上の長さ，$\mathbb{R}^2$ 上の面積，$\mathbb{R}^l$ 上の「体積」としては自然なものと映る．

完全加法族の取り方に関して，証明を省略して，結果を述べると，

(1) 可測空間 $(\mathbb{R}, \mathscr{B}^1)$（あるいは $(\mathbb{R}^l, \mathscr{B}^l)$）に対して，式 (3.9), (3.10) を満たす測度 μ が存在することが示される．この測度を**ルベーグ測度** (Lebesgue measure) という．

(2) $\mathbb{R}$（あるいは $\mathbb{R}^l$）の完全加法族として，$\mathbb{R}$（あるいは $\mathbb{R}^l$）のべき集合 $2^{\mathbb{R}}$（あるいは $2^{\mathbb{R}^l}$）を定めると，注意 3.3, 例 3.1 における $\mu_0, \mu_\infty, \mu_\sharp$ は存在するが，式 (3.9), (3.10) を満たす測度をつくることはできない．完全加法族を大きくすればするほど，測度の定義は難しくなる．

同じ集合 $\mathbb{R}$ で考えても，定義 2.3 で定義したボレル集合族 $\mathscr{B}^1$（これは完全加法族である）と，命題 3.4 における有限加法族 $\mathscr{A}$ とは，まったく違うものである．$\mathscr{B}^1 \supset \mathscr{A}$ だが，$\mathscr{B}^1$ の方が $\mathscr{A}$ よりも格段に大きい．$\mathscr{B}^1$ 上の関数を定義するというのはとてつもない労苦を要する大事業である．そもそも $\mathscr{B}^1$ の元をすべて呈示すること自体がとてつもない作業である．

そこで，完全加法族ではない，部分集合の族 $\mathscr{A}$ から出発し，それを拡張していくことを考えることになるのである．すでに見たように，命題 3.4 より，$\mathscr{D}$ は有限加法族であり，命題 3.4, 3.5 より，ボレル集合族 $\mathscr{B}^1$ は $\mathscr{D}$ を含む最

小の完全加法族である．

次回，命題 3.4 における有限加法族 $\mathscr{D}$ から出発し，その上で測度を定義していき，式 (3.9) を満たす測度を構成することを見る．そして，このように構成された測度 μ と一致する $\mathscr{B}^1$ 上の測度 μ^* が存在し（カラテオドリの拡張定理），一意に定まる（ハーンの拡張定理）ことを見る．高次のユークリッド空間 $\mathbb{R}^l$ についても同様である．

さらには，ルベーグ積分の定義へ進むことになる．測度ゼロの集合の概念が重要である．実際のルベーグ積分の計算においては，単調収束定理や優収束定理（ルベーグの収束定理）などが重要となる．

次回，節を改め，第 3 節としてルベーグ測度から始めることとしたい．

［参考文献］

[1] 新井仁之, ルベーグ積分講義, 日本評論社, (2003).

[2] 佐藤坦, はじめての確率論　測度から確率へ, 共立出版, (1994).

[3] 吉田伸生, ルベーグ積分入門, 遊星社, (2006).

[4] Irigoyen, C., Rossi-Hansberg, E. and Wright, M. L. J., *Solutions Manual for Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard Univ Pr, (2002).

[5] Stokey, N. L., Lucas, R. E., Jr. with Prescott, E. C., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, W. W. Norton, (1989).