需要分析について

後藤儀一郎

一般に言われる需要分析，たとえば，政府がある商品の需要量を予測するのと，企業が製品の需要を予測するのでは，問題意識も違うし，具体的方法も違う。ここで述べる需要分析は，企業の側からの需要分析である。

企業が経営計画を作成する際の出発点が，製品の市場の分析と需要の予測である。企業は，将来の不確実性からくるところの危険を排除することが必要である。予測はその危険にできるかぎり備えようとするためのものである。

製品の将来の需要に影響を与えるものと思われる要因は，まことに複雑で，世界の政治経済，国内の経済の見通し，エネルギー事情等が重なり合って将来の需要に影響するはずである。これらの多くの要因を体系的に分析するには，可成り広範囲のものとなるが，ここでは，需要予測との関連で統計的分析手法について述べる。

1. 需要関数

一般に企業が需要関数を考える場合には2通りの方法が考えられる。国民経済的立場から，総体的な業種需要の予測を行い，その結果をうけて，同業他社との競争要因，たとえば市場占有率の推定値を加味して需要分析を行う。

他方，需要関数のなかに，はじめから，市場占有要因―競争相手の価格と自社との相対価格，最近問題となっているアメリカへの自動車輸出の場合には，相対的品質指数として，車の相対走行距離指数―を含めて需要関係を考える方法である。

需要分析で大切なことは，需要量に影響を与える諸要因をみつけ出し，それ

らの因果関係を分析することである。

需要分析をする方法は，たとえば既存の統計データを用いて，相関分析や回帰分析を中心とするもの，顧客を対象とする市場調査による方法がある。いずれにしても，事前に需要の性格を検討する必要がある。たとえば，消費財か生産財かによっても，需要量に影響を与える要因が異なるから必然的に分析の方法は違ってくる。また，テレビや自動車の需要分析を行う場合には，新規需要と更新需要とに分けて分析して，その後に2つを合算する必要が生じるかも知れない。

消費財の需要量を決定する要因として，消費者の購買力を示すものとしての実質可処分所得とその商品価格が需要量を決定する最も大きな要因であろう。また，物価水準や人口，企業の行う広告活動，代替品の存在も需要量に影響を与えるであろう。自動車，テレビ，電気冷蔵庫のような耐久消費財の場合には，月賦条件，銀行の消費者信用の利子のようなものが需要量に影響を与えるであろう。また新製品の場合には，デモンストレーション効果が強く働くことであろう。

生産財の需要量を決定する要因として，顧客企業の利潤，売上予想，投資意欲，設備の稼動率のようなものが需要量に影響を与えるであろう。玩具，学用品，食料品，飲料，薬のような場合には，人口の構成，すなわち，所得階層，性別，学歴，職業，年齢のようなものが強く需要量に影響を与えるかも知れない。

製品の需要量と個々の需要決定要因との関係の分析は，弾力性を測定する方法，回帰方程式による方法がある。しかし，一般的にどの需要決定要因を需要関数の方程式のなかにいれるかという問題については，定式はない。同じ需要決定要因であっても，製品の種類や市場の状態によって，需要量に与える影響の重要度が異なるからである。

また，需要決定要因として，消費者の購買力を示す指標として実質可処分所得をとり上げたが，製品の種類によって，食費，住居費，光熱費等を実質可処分所得から控除したり，有価証券や預金等の流動資産を実質可処分所得に加算

する問題も事前に検討されなければならない。

2. 需要関数の定式化

このように考えて，消費財の需要関数を数学的に表すと次のようになる。

$$D=f(Y,\ P,\ V,\ p,\ A) \tag{2-1}$$

ここで，D＝総需要量，Y＝所得要因，P＝一般物価水準，V＝人口，p＝この商品の価格，A＝広告費である。次に，ある i 企業の販売高 D_i を決定する関数は，

$$D_i=a_i D \tag{2-2}$$

である。ここで，a_i＝i企業のマーケットシェアである。これには市場分割要因が考慮されていない。この点を考慮して，a_i 自身も結果的に決まるものと考えて，

$$D_i=g(Y,\ P,\ V,\ p,\ A,\ p',\ A_i,\ B_i) \tag{2-3}$$

とするのである。ここで，p'＝競争相手商品の価格，A_i＝i企業の広告費，B_i＝i 企業の営業力（たとえばセールスマンの数）である。

このようにして，需要量を決定する要因を決めたら，次は需要関数の計測である。そうしなければ実際的な意味がないからである。この場合，関数型にはいろいろなものがあるが，そのうちおもなものは２つである。１つは線型式であり，もう１つは対数線型式，すなわち弾力性の測定である。たとえば（2-3）式の需要関数の線型式は，

$$D_i=\alpha_0+\alpha_1 Y+\alpha_2 P+\alpha_3 V+\alpha_4 p+\alpha_5 A+\alpha_6 p'+\alpha_7 A_i+\alpha_8 B_i \tag{2-4}$$

となる。ここで α_i は需要量に影響を与える i 要因が１単位変化したときに，需要に及ぼす量であり，この需要関数のパラメータである。また同じく対数線型式は，

$$D_i=\beta_0 Y^{\beta_1} P^{\beta_2} V^{\beta_3} p^{\beta_4} A^{\beta_5} p'^{\beta_6} A_i{}^{\beta_7} B_i{}^{\beta_8} \tag{2-5}$$

となる。ここで，β_i はパラメータであり，需要に影響を与える i 要因の需要の弾力性である。i 要因が１％変化したときに，需要がそれによって何％変動するかを示すものである。

需要関数の計測は，需要関数のなかに含まれる需要決定要因の数が多くなればなるほど困難さを増してくる。それは多重共線性の問題，識別の問題があるからである。

多重共線とは，需要決定要因がきまり，それについてのデータがえられたのちに，通常，最小2乗法によってパラメータの推定が行われる。

いま説明の便宜上，需要決定要因は2つであり，それは X_1，X_2 であるとする。線型式も対数線型式も次のように表すことができる。

$$y=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon \tag{2-6}$$

ここで，x_1 と x_2 が高い相関をもっていて，$x_1=\alpha x_2$ という関係が成りたっているものとしよう。そうすると（2-6）式は，

$$y=(\beta_1\alpha+\beta_2)x_2+\varepsilon \tag{2-7}$$

となり，（2-6）式と（2-7）式は，みかけ上，同じである。最小2乗推定量は，需要決定要因変数（統計学的には，これを説明変数という。）行列を X とし，需要量の変数行列を Y とすると，

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y \tag{2-8}$$

$$V(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1} \tag{2-9}$$

である。そうすると

$$(X'X)=\begin{bmatrix}\Sigma x_1^2\Sigma x_1x_2^2\\ \Sigma x_1x_2\Sigma x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^2\Sigma x_2^2\alpha\Sigma x_2^2\\ \alpha\Sigma x_2^2\Sigma x_2^2\end{bmatrix}$$

$$=\Sigma x_2^2\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\\ \alpha & 1\end{bmatrix}$$

となって，$|X'X|=0$ である。したがって逆行列は存在しない。このような場合，多重共線関係が成りたっているという。X_1 が変化すれば，それにつれて X_2 も変化するため，Y の変化を説明する要因が，2変数 X_1 と X_2 であるとしても，X_2 だけであるとしても，みかけ上，同じことになってしまう。X_1 と X_2 の別々の説明力を推定することは不可能である。

もっと極端でなく，現実に起こりそうなものは，高い相関をもつが完全相関ではなく，近似的に，$|X'X|\fallingdotseq 0$ となる場合である。この場合には，（2-6）式

の β_1 と β_2 の最小２乗推定量は，

$$\hat{\beta}_1=\frac{\Sigma x_2^2\Sigma x_1y-\Sigma x_1x_2\Sigma x_2y}{\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2-(\Sigma x_1x_2)^2} \tag{2-10}$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{\Sigma x_1^2\Sigma x_2y-\Sigma x_1x_2\Sigma x_1y}{\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2-(\Sigma x_1x_2)^2} \tag{2-11}$$

である。x_1 と x_2 の間に近似的に共線関係が成りたっていれば，

$$\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2-(\Sigma x_1\Sigma_2)^2\fallingdotseq 0$$

となり，一応最小２乗推定量は求まる。しかし，分母は０に近い値であるから，分子のわずかの変動にも，$\hat{\beta}$ の値は大きく影響されるであろうと想定される。また，$\hat{\beta}$ の分散共分散行列は，

$$V(\hat{\beta})=\sigma^2(X'X)^{-1}=\frac{\sigma^2}{\Sigma x_1^2\Sigma x_2^2-(\Sigma x_1x_2)^2}\begin{bmatrix}\Sigma x_2^2 & -\Sigma x_1x_2\\ -\Sigma x_1x_2 & \Sigma x_1^2\end{bmatrix} \tag{2-12}$$

となる。多重共線のために，たとえ σ^2 が小さくとも $\hat{\beta}$ の共分散は大きくなるであろう。すなわち，推定値の信頼度は低くなるであろう。多重共線の問題とは，要するに，Y に及ぼす影響について，X_1 と X_2 の別々の影響の度合を測定することは不可能であり，X_1 と X_2 の重なりあった影響だけ測定可能であるということである。

このような多重共線をさける方法として，R. Frisch はバンチ・マップ bunch map による分析を提案している。グラフを利用するかなり直観的なものである。[(1)] 一般的によく用いられる方法は，説明変数のなかで共線関係にある部分の一部を関係式から除去するという方法である。予測ということに対しては，この方法は正しい結果を与える。次は実証分析から導びかれたもので，各変数の第１階差をとって，すなわち，$\Delta Y=\beta_0+\beta_1\Delta X_1+\beta_2\Delta X_2$ の回帰係数を求める方法である。また，共線関係におちいるのは，時系列データに基づいて推定がなされるからであり，それを免れるためには時系列データと横断面データを結びつけて用いる方法もある。

次に，共線関係を免れるために $|X'X|\fallingdotseq 0$ を改良して，最小２乗法による推定方法もある。すなわち，行列の対角要素にある一定数 k を加えれば，０からいくらでも遠ざかることができる。そこで次のような推定量を考える。

$$\hat{\beta}_k = (X'X + kI)^{-1}X'Y \tag{2-13}$$

この推定量をリッジ（ridge）推定量とよんでいる。この推定量は不偏推定量ではない。しかし，

$$V(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X'X)^{-1}$$

であり，一方，

$$V(\hat{\beta}_k) = (X'X + kI)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X + kI)^{-1}$$
$$= \sigma^2(X'X + kI)X'X(X'X + kI)^{-1}$$

となるから，$\hat{\beta}_k$ の分散のほうが小さい。したがって適当に k を選べば，$\hat{\beta}$ より小さい誤差の推定値がえられることになる。実際の問題として，計算が面倒であって，k の値の選び方は難しいと思われる。

3.　需要予測のための統計分析方法

企業が需要を予測する統計手法はいろいろな種類が考えられる。まず簡単な，過去数年間の売上げの伸び率を，今年の売上げに乗じて明年の売上げを予測するものから始まって，決定理論にいたるまで，いろいろな手法が存在している。特に将来に向けての不確実性からくる危険に対処するために，情報の収集に務め，情報は不確実性を確実化してくれる作用をするものであり，それによって予測し，大局的な立場から意思決定をしなければならない。

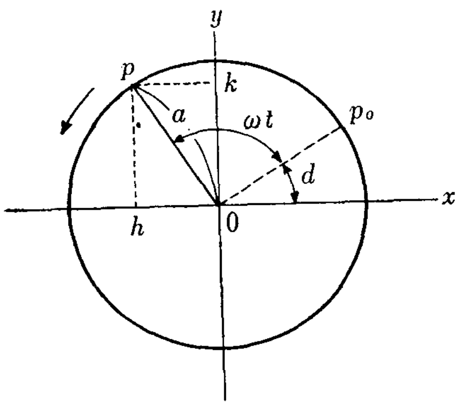
3.1　時系列分析による方法

企業が需要を予測する場合，現状の動向の把握が一切の出発点であり，現状は過去の何らかの延長であると考えることから予測するのが，時系列分析の基本的な考え方である。

時系列は傾向変動，循環変動，季節変動，不規則変動の4要素の合成からなるとみなされている。季節変動は，12ヵ月を周期とする変動であるから，移動平均すれば計測可能である。季節変動のパターンが変動であるか，可変であるかによって，固定季節指数，移動季節指数に分けられる。そして，季節変動を

何の関数で表すかによって計算方法も異なってくるし，また，時系列の4要素がどのような形で結び合っているのかによっても計算方法が異なってくる。たとえば，ドイツでは季節変動をトレンド，循環変動の関数として，回帰方式で求めている。ここでは移動平均について述べる。

与えられた時系列が単振動で表される場合について考える。単振動とは，定円周上を等速で回転する点 P の運動を考えたのであるが，この場合 P 点の x 軸上への正射影 h, k の行う周期運動を特に単振動という。いま P 点の最初の位置を左図の P_0 点とし，P 点の角速度を ω（動径 OP が1秒間に ω radian ずつ回転する）とすれば，t 秒後に Op が Oa となす角は $\omega t+\alpha$ となるから h, k の位置はそれぞれ，



$$x(t)=a\cos(\omega t+\alpha) \tag{3-1}$$

$$y(t)=a\sin(\omega t+\alpha) \tag{3-2}$$

で表される。一般に，時間 t における点の位置が（3-1）式，（3-2）式で表される運動が単振動なのである。この場合 x は± a の間を変化するので，この a を単振動の振幅という。また，

$$\cos(\omega t+\alpha)=\cos\left\{\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\alpha\right\} \tag{3-3}$$

$$\sin(\omega t+\alpha)=\sin\left\{\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\alpha\right\} \tag{3-4}$$

であるから

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \tag{3-5}$$

の時間間隔をおいて同様の運動を繰り返すので，T を単振動の周期という。

この時系列の（$2n+1$）項移動平均値は，

$$x(t)=\frac{1}{2n+1}\{x(t-n)+x(t-n+1)+\cdots\cdots+x(t)+\cdots\cdots+x(t+n)\}$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{s=-n}^{n} a\cos\{\omega(t+s)+\alpha\}$$

$$=\frac{a}{2n+1}\frac{\sin\frac{(2n+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\cos(\omega t+\alpha) \tag{3-6}$$

これは，振幅が

$$\frac{a}{2n+1}\frac{\sin\frac{(2n+1)\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

で，角速度および位相が原系列と同じの単振動である。この場合，原系列に比べて振幅が

$$r=\frac{\sin\frac{(2n+1)\omega}{2}}{(2n+1)\ \sin\frac{\omega}{2}}=\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{T}}{(2n+1)\ \sin\frac{\pi}{T}} \tag{3-7}$$

倍されている。r は $\frac{2n+1}{T}$ が整数のとき，すなわち，移動平均の項数が周期 T の整数倍のとき，$r=0$ となり振幅はなくなる。

除去される波動の周期は月次系列の場合

$$\frac{12\pi}{T}=K\pi \text{ から } T=\frac{12}{K}\quad (K \text{ は整数})$$

となるから，12，6，4，3，2.4，２月の６個の波である。四半期系列の場合は4，２期の２個の波である。

省略するが加重移動平均を行った場合，除去される波動は，定差方程式の解を求めることにより求まる。

不規則変動は予測しにくいが移動平均のような工夫で調整できる。したがって，予測者の関心の中心は傾向変動と循環変動の分析である。

傾向変動の予測は，時系列の最近の変化率はそのまま将来も継続するものと仮定することから出発する。通常，最小２乗法を用いて過去の傾向をつかみ，それを外挿して予測するのである。このとき，時系列にウェイトをつけずに計算する場合と，近い過去にウェイトをつけて計算する場合がある。

一般に，時系列のトレンドを求める方法は，トレンドが時間 t の代数式で現わされるものと仮定して，t に関する何次かの多項式

$$T_t=b_0+b_1t+b_2t^2\cdots\cdots+b_nt^n$$

の係数 b_0，b_1，b_2，……，b_n の値を最小２乗法で推定する方法である。ただ，最小２乗法が最良不偏推定値となるのは，(1)誤差変動と説明変数とは無相関であり，(2)誤差変動はお互いに独立で，時点にかかわらず平均，分散が一定の正規分布に従う必要がある。

この条件は，時系列がトレンドと偶然変動のみならば満たされる。時系列にその他の波が含まれていると満たされない。しかし，偶然変動と同じように，その他の波も長期にわたって合計すれば平均がゼロに近づくし，また，これと偶然変動と合体したものは，正規分布に従わないとしても，これに近い対称分布を示すであろうと推定されるなら，最小２乗法で求めたパラメータ b_0，b_1，……，b_n はそれほど大きなバイアスをもたないであろう。

最小２乗法は，時系列 x_t とトレンド T_t との差の２乗の総和を最小にするようにパラメータ b_0，b_1，……，b_n を決めなさいということに帰着する。

これは次の連立方程式を満たす b_0，b_1，……，b_n である。

$$\begin{aligned}
&\Sigma x_t=\Sigma b_0+b_1\Sigma t+b_2\Sigma t^2+\cdots\cdots+b_n\Sigma t^n\\
&\Sigma x_tt=b_0\Sigma t+b_1\Sigma t^2+b_2\Sigma t^3+\cdots\cdots+b_n\Sigma t^{n+1}\\
&\Sigma x_tt^2=b_0\Sigma t^2+b_1\Sigma t^3+b_2\Sigma t^4+\cdots\cdots+b_n\Sigma t^{n+2}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Sigma x_tt^n=b_0\Sigma t^n+b_1\Sigma t^{n+1}+b_2\Sigma t^{n+2}+\cdots\cdots+b_n\Sigma t^{2n}
\end{aligned}\qquad(3\text{-}8)$$

これらの連立方程式の計算は簡略化する方法がある[(2)]。いま時間 t の原点を計算期間の中央項に定めると，奇数次の t の合計はすべてゼロとなる。

$$\Sigma_t=\Sigma t^3=\cdots\cdots=0$$

表１のトレンドを２次の多項式で求めると，

$$747.2=7b_0+28b_2$$

$$-94.3=28b_1$$

$$3,254.7=28b_0+196b_2$$

から

$$b_0=94.06,\ b_1=-3.37,\ b_2=3.17$$

が得られ，このトレンドは，

$$T_t=94.06-3.37t+3.17t^2$$

で与えられる。

表 1　鉄鋼の需給（50年＝100）

年	x_t	t	$x_t t$	t^2	$x_t t^2$	t^4	$\hat{T}_t$
48	131.0	−3	−393.0	9	1,179.0	81	132.7
49	116.0	−2	−232.0	4	464.0	16	113.5
50	100.0	−1	−100.0	1	100.0	1	100.6
51	95.8	0	0	0	0	0	94.1
52	92.3	1	92.3	1	92.3	1	93.8
53	97.9	2	195.8	4	391.6	16	100.0
54	114.2	3	342.6	9	1,027.8	81	112.5
Σ	747.2		−94.3	28	3,254.7	196	

資料：通産省「鉄鋼統計月報」

最小2乗法で推定されたパラメータ b_0, b_1, ……, b_n は，同一の時系列を用いたとしても多項式の次数が違えば推定されたパラメータ間に違いがでてくる。例えば1次の多項式と2次の多項式のパラメータは，

1次

$$b_0=\frac{\Sigma x_t}{m},\quad b_1=\frac{\Sigma x_t t}{\Sigma t^2} \tag{3-9}$$

2次

$$b_0=\frac{\Sigma t^2\Sigma x_t t^2-\Sigma t^4\Sigma x_t}{(\Sigma t^2)^2-m\Sigma t^4} \tag{3-10}$$

$$b_1=\frac{\Sigma x_t t}{\Sigma t^2} \tag{3-11}$$

$$b_2=\frac{\Sigma t^2\Sigma x_t-m\Sigma x_t t^2}{(\Sigma t^2)-m\Sigma t^4} \tag{3-12}$$

b_1 は一致するが b_0 は一致しない。さらに3次の多項式のパラメータを求めると，

$$b_0=\frac{\Sigma t^2\Sigma x_t-\Sigma t^4\Sigma x_t}{(\Sigma t)^2-m\Sigma t^4} \tag{3-14}$$

$$b_1=\frac{\Sigma t^2\Sigma x_t t^3-\Sigma t^6\Sigma x_t t}{(\Sigma t^4)-\Sigma t^2\Sigma t^6} \tag{3-15}$$

$$b_2=\frac{\Sigma t^2\Sigma x_t-m\Sigma x_t t}{(\Sigma t^2)^2-m\Sigma t^4} \tag{3-16}$$

$$b_3=\frac{\Sigma t^4\Sigma x_t t-\Sigma t^2\Sigma x_t t^3}{(\Sigma t^4)^2-\Sigma t^2\Sigma t^6} \tag{3-17}$$

となって，2次と3次の間では b_0 と b_2 は一致するが b_1 は一致しない。したがって，3次の多項式のパラメータ b_0, b_1, b_2, b_3 を推定するのに，2次のパラメータ b_0, b_1, b_2 を利用して，残りの b_3 だけを計算すればよいというわけにはいかない。

しかし，以下に述べる直交関数を用いるとそれができるようになる。

時間 t の関数 $\phi_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ で，

$$\Sigma\phi_i(t)\phi_j(t)=0,\quad i\neq j \tag{3-18}$$

という関数があるものとする。このような関数を直交関数という。この直交関数を用いてトレンド T_t は次のように表わされる。

$$T_t=b_0\phi_t(t)+b_1\phi_1(t)+b_2\phi_2(t)+\cdots\cdots+b_n\phi_n(t) \tag{3-19}$$

この直交関数 $\phi_0(t)$ のパラメータ b_i の値を推定する。時系列 x_t とトレンド T_t の差の2乗の総和を最小にするようにして推定するものとする。そうすると，$\phi_t(t)$ は相互に直交関係にあるから，連立方程式は，

$$\begin{aligned}&\Sigma x_t\phi_0(t)=b_0\Sigma\phi_0(t)^2\\&\Sigma x_t\phi_1(t)=b_1\Sigma\phi_1(t)^2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\Sigma x_t\phi_n(t)=b_n\Sigma\phi_n(t)^2\end{aligned} \tag{3-20}$$

となって，b_0, b_1, b_2, ……, b_n の値は，それぞれ単独の式で定められること

になり，２次の多項式のパラメータを利用して３次の多項式のパラメータを求めるのに利用できる。

この直交関数 $\phi_i(t)$ が具体的にどのようなものとなるかを明らかにするために，さらに，

$$\mu_0(t),\ \mu_1(t),\ \cdots\cdots,\ \mu_i(t)$$

という別の時間 t の関数 $\mu_i(t)$ を用いて，先ず，

$$\phi_0(t)=\mu_0(t) \tag{3-21}$$

とおき１次に，

$$\phi_1(t)=\mu_1(t)+\alpha\phi_0(t) \tag{3-22}$$

とおいて，この α を

$$\Sigma\phi_0(t)\phi_1(t)=0$$

となるようにして求める。すなわち，

$$\Sigma\mu(t)\phi_0(t)+\alpha\Sigma\phi_0(t)^2 \tag{3-23}$$

から

$$\alpha=\frac{\Sigma\mu_1(t)\phi_0(t)}{\Sigma\phi_0(t)^2} \tag{3-24}$$

となり先の式に代入すると，

$$\phi_1(t)=\mu_1(t)-\frac{\Sigma\mu_1(t)\phi_0(t)}{\Sigma\phi_0(t)}\phi_0(t) \tag{3-25}$$

となる。次に，

$$\phi_2(t)=\mu_2(t)+\beta_0\phi_0(t)+\beta_1\phi_1(t) \tag{3-26}$$

とおいて，

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\phi_2(t)\phi_0(t)=0\\&\Sigma\phi_2(t)\phi_1(t)=0\end{aligned}\right. \tag{3-27}$$

となる。

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma\phi_0(t)\mu_2(t)+\beta_0\Sigma\phi_0(t)^2=0\\&\Sigma\phi_1(t)\mu_2(t)+\beta_1\Sigma\phi_1(t)^2=0\end{aligned}\right. \tag{3-28}$$

から

$$\beta_0 = -\frac{\Sigma\phi_0(t)\mu_2(t)}{\Sigma\phi_0(t)^2} \tag{3-29}$$

$$\beta_1 = -\frac{\Sigma\phi_1(t)\mu_2(t)}{\Sigma\phi_1(t)^2} \tag{3-30}$$

となり，この β_0，β_1 を先に代入すると，

$$\phi_2(t) = \mu_2(t) - \frac{\Sigma\phi_0(t)\mu_2(t)}{\Sigma\phi_0(t)^2}\phi_0(t) - \frac{\Sigma\phi_1(t)\mu_2(t)}{\Sigma\phi_1(t)^2}\phi_1(t)$$

$$= \mu_2(t) - \sum_{i=0}^{1}\left\{\frac{\Sigma\phi_i(t)\mu_2(t)}{\Sigma\phi_i(t)^2}\phi_i(t)\right\} \tag{3-31}$$

となる。このようにしてさらに求めてゆけば

$$\phi_k = \mu_k(t) - \sum_{i=0}^{k-1}\left\{\frac{\Sigma\phi_i(t)\mu_k(t)}{\Sigma\phi_i(t)^2}\phi_i(t)\right\} \tag{3-32}$$

となり，一般形が求められ，

ここで

$$\mu_0(t)=1,\ \mu_1(t)=t,\ \mu_2(t)=t^2,\ \cdots\cdots,\ \mu_n(t)=t^n$$

とおけば，

$$\phi_0(t) = \mu_0(t) = 1$$

$$\phi_1(t) = t - \frac{\Sigma t}{n} = t$$

$$\phi_2(t) = t^2 - \frac{\Sigma t^2}{n} - \frac{\Sigma t^3}{\Sigma t^2}t = t^2 - \frac{n^2-1}{12}$$

$$\phi_3(t) = t^3 - \frac{\Sigma t^3}{n} - \frac{\Sigma t^4}{\Sigma t^2}t - \frac{\Sigma t^3\phi_2(t)}{\Sigma\phi_2(t)^2}\phi_2(t) = t^3 - \frac{3n^2-7}{20}t$$

となり，このようにしてさらに求めてゆけば，

$$\phi_4(t) = t^4 - \frac{3n^2-13}{14}t^2 + \frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560}$$

$$\phi_5(t) = t^5 - \frac{5(n^2-7)}{18}t^3 + \frac{15n^4-230n^2+407}{1008}t$$

$$\phi_6(t) = t^6 - \frac{5(n^2-31)}{44}t^4 + \frac{5n^4-110n^2+329}{176}t$$

$$- \frac{5(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{14874}$$

等々が求まる。

前記の時系列のトレンドを直交関数を用いて求める。２次の多項式の場合には，

$$T_t=b_0\phi_0(t)+b_1\phi_1(t)+b_2\phi_2(t)=b_0+b_1t+b_2\left(t^2-\frac{m^2-1}{12}\right)$$

となり，また，

$$b_0=\frac{\Sigma x_t\phi_0(t)}{\Sigma\phi_0(t)^2},\quad b_1=\frac{\Sigma x_t\phi_1(t)}{\Sigma\phi_1(t)^2},\quad b_2=\frac{\Sigma x_t\phi_2(t)}{\Sigma\phi_2(t)^2}$$

であり，さらに，

$$\phi_0(t)=1,\quad \phi_1(t)=t,\quad \phi_2(t)=t^2-\frac{m^2-1}{12}$$

であるから，

$$b_0=\frac{\Sigma x_t}{m},\quad b_1=\frac{\Sigma x_t t}{\Sigma t^2},\quad b_2=\frac{\Sigma x_t\left(t^2-\frac{m^2-1}{12}\right)}{\Sigma\left(t^2-\frac{m^2-1}{12}\right)^2}$$

となる。

先の鉄鋼の需給の例を用いると，

$$b_0=\frac{747.2}{7}=106.74,\quad b_1=\frac{-94.3}{28}=-3.37$$

$$b_2=\frac{\Sigma x_t t^2-4\Sigma x_t}{\Sigma(t^2-4)^2}=\frac{3,254.7-2,988.8}{\Sigma t^4-8\Sigma t^2+7\times16}=\frac{265.90}{84}=3.17$$

となり，トレンド T_t は，

$$T_t=b_0+b_1t+b_2\left(t^2-\frac{m^2-1}{12}\right)$$

$$=106.74-3.37t+3.17t^2-12.68$$

$$=94.06-3.37t+3.17t^2$$

となる。

昭和40年から54年までの15年間の乗用車生産の時系列から将来を予測すると以下のようになる。

乗用車生産（1,000台）

年	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
x_t	696	878	1,376	2,056	2,611	3,179	3,718	4,022	4,471	3,932	4,568
$\hat{T}_t$	873	1,265	1,656	2,048	2,438	2,829	3,220	3,610	4,000	4,390	4,779

年	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
x_t	5,028	5,431	5,976	6,176						
$\hat{T}_t$	5,169	5,558	5,947	6,336	6,724	7,112	7,500	7,888	8,276	8,663

資料：日本自動車工業会，「自動車統計月報」

$$b_0=\frac{\Sigma x_t}{m}=\frac{54,118}{15}=3,607.87$$

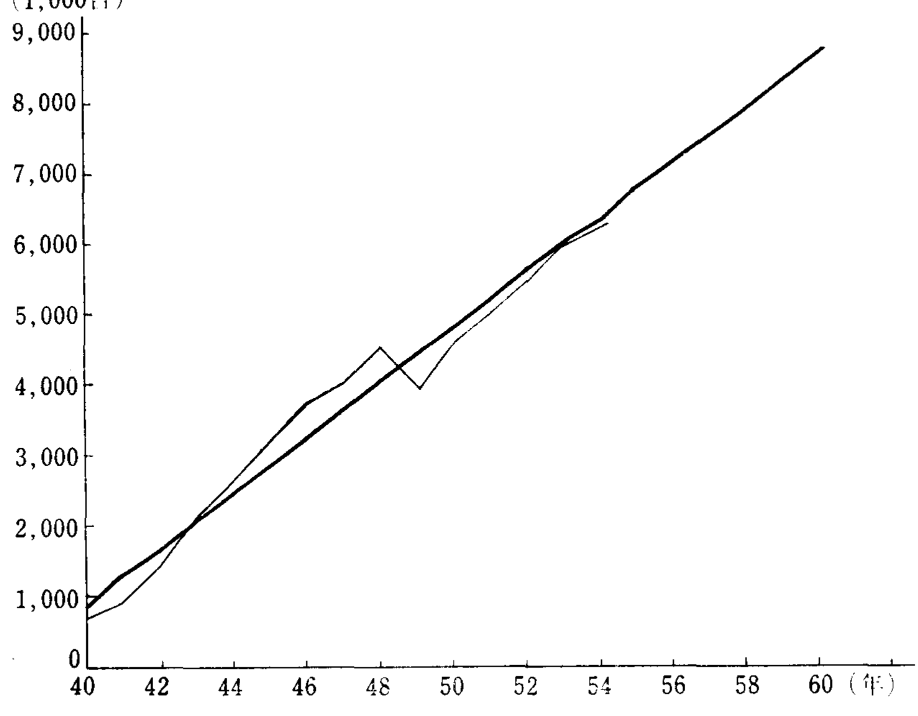
$$b_1=\frac{\Sigma x_t t}{\Sigma t^2}=\frac{109.241}{280}=390.15$$

$$b_2=\frac{\Sigma x_t t^2-\frac{m^2-1}{12}\Sigma x_t}{\Sigma\left(t^2-\frac{m^2-1}{12}\right)^2}=\frac{-42,148.06}{372,430.35}=-0.11$$

$$T_t=b_0+b_1t+b_2\left(t^2-\frac{m^2-1}{12}\right)$$

$$=3,609.92+390.15t-0.11t^2$$

乗用車生産



回帰分析，*OR*，弾力性，決定理論による手法については別稿に予定している。

注

(1) R. Frish, Statistical Confluence Analysis by Means of Complete Regression Systems, Oslo, 1934.

(2) H.T. Davis, The Analysis of Economic, Principia Press, 1941, p. 208-275.

参考文献

T.W. Anderson, An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, John Wiley and Sons, 1958.

H.T. Davis. 前出

J.L. Doob, Stochastic Process, John Wiley and Sons, 1953.

A.S. Goldberger, Econometric theory, John Wiley and Sons, 1964.

E.J. Hannan, Time Series Analysis, Methuen, 1960.

Multiple Time Series, John Wiley and Sons, 1970.

M.D. Interiligator, Econometric Models, Techniques and Applications, North-Holland, 1978.

J. Johnston, Econometric Methods, McGraw-Hill, 1963.

W.C. Labys, Quantitative Models of Commodity Markets, Ballinger, 1975.

A.D. Strickland & L. Weiss, Advertising Concentration, and Price-Cost Margins, J.P.E, 1976.

H.Wold, Demand Analysis, John Wiley, 1953.