Newton
数学／自然哲学における方法の問題

小宮山　隆

はじめに

真理に到達するための方法の論議はソクラテスに始まる。プラトンはまた、イデアに到達する方法を弁証法と呼んだ。そしてアリストテレスの論理学は、とりもなおさず、本来的な、端的な存在者、すなわち「実体」(ousia) に至ろうとする彼の営為における方法論にほかならない。

方法とは、さしあたり〃ある目的を達成するためのもの〃であってみれば、われわれがある方法の確立について語ろうとするとき、その目的をぬきにして語ることはできない。その場合、何が目的とされ、そのためにどのような方法がとられたのか——この問題はしばしば二つの問題として別個にたてることができない。

また、いかに普遍的な方法も、目的に向かう営為と一体をなしてあい表裏するなかで確立されていくとするなら、その過程を検討することによって、方法そのものの論議、批判的検討とは別な側面から、その方法の積極的、能動的な意義あるいは限界を明らかにすることも望めるのではないだろうか。

一七世紀、いわゆる科学革命の時代は、その革命という呼称を「方法の革新」に負っている。その革新の内容は、ひとまず自然研究における「数学と実験の結合」と表現することができよう。しかしながら、方法の革新とは新しい方法の確立にほかならないとすれば、そこには〝何が目的とされたか〟という目的の側における革新、言いかえれば〝問題のたて方〟の革新がともなっているはずである。この点について、「自然科学の父」ガリレオは、『新科学対話』(1)(一六三八)のなかで、自らを代弁する「科学者サルヴィアチ」に次のように語らせるのである。

「今ここで自然運動の加速の原因が何であるかを研究するのは不適当でしょう。これについてはいろいろの学者が種々の意見を提出しています。(中略)これらの考えをすべて検討する必要もありましょうが、得るところはほとんどないでしょう。しかし、わが著者がさしあたり求めているのは、その原因は何であれ、加速運動の本性を研究し説明することにあるのです。」(傍点筆者)

アリストテレス以来の伝統的な自然学が問題にしてきた類いの「原因」の追及を棚上げして、現象の変化の有様そのものを問題にしていくこの姿勢こそ、新しい問題領域を開き、方法の革新を迫ったものと言えるだろう。

この新しい領域を前にして、方法に対する意識の高さは問題把握の深さや広さに反映し、問題設定の革新性への自覚は方法への自覚を導いていく。というわけで、「方法の哲学者」デカルトは「事物の真理の探究には〝方法〟が必要である」(精神指導の規則——規則4)とあらためて宣言し、『方法序説』(一六三七)における方法の適用として『屈折光学』、『気象学』、『幾何学』を展開する。そして、この『幾何学』が解析幾何学の誕生を告げるものであることが端的に示すように、「数学と実験の結合」として語られる数学もまた、既成の数学ではなく、新しい領域を前にして革新されたものなのである。

哲学するための規則

本稿で検討の対象とするニュートンについては、『プリンキピア』(Principia Mathematica Philosophiae Naturalis〔自然哲学の数学的諸原理〕)、一六八七、一七一三、一七二六)第三巻の冒頭に示された「哲学するための規則」(Regulae Philosophandi) が、その自然哲学、実験哲学の方法としてよく知られている。

規則Ⅰ　自然の事柄の原因としては、真実であり、かつその諸事象を説明するために充分である以上に、多くのものを認めるべきではない。

規則Ⅱ　それゆえ、自然の同種の結果に対しては、できるかぎり、同じ原因が帰着されなければならない。

これらは、次にあげるものを含めて、近代自然科学の進展のなかで、科学的研究における指針、指導原理

とも言うべき役割を果たすことになるが、それが「規則」（科学研究を行なう際に準拠すべき規則）という形で提示されるのは、第二版（一七一三）でのことである。また、同じく第二版で「規則Ⅲ」が、第三版で「規則Ⅳ」が追加される。

規則Ⅲ　……実験（経験）の範囲内ですべての物体に属することを見出しうるところの物体の性質は、あらゆる物体のもつ性質であると見なすべきである。

規則Ⅳ　実験哲学においては、現象から帰納によって推論された命題を、反対の仮説によって妨げるべきでなく、他の現象が出現してそれによってさらに精確にされるか、それとも除外されなければならなくなるまで、真なるものと、あるいはきわめて真なるものと見なすべきである。

以上が「哲学するための規則」である。

「規則Ⅰ」および「規則Ⅱ」がニュートン自身の体系のなかで最もドラスティックな役割を果たすのは、惑星や衛星をその軌道に保っている〝力〟と地球上の重力とを同一のものとして導く場面であろう。

「月がその軌道に保たれる力は、地球の表面まで降りてきたときには、われわれのいる所での重力の大きさに等しくなり、したがって〔規則Ⅰおよび規則Ⅱにより〕われわれが重力と通常呼んでいる力そのものである。」（〔　〕内もニュートンの言及）(2)

また、万有引力（普遍的重力）の法則は、第二版で追加された「規則Ⅲ」にうったえることによって導かれる。

「地球周辺の物体は、すべて地球に向かって重力で引かれ、それぞれ物体に存する物質の量に比例すること、そして月もその物質の量に比例して地球に向かって重力によって引かれ、反対にわれわれの海は月に向かって重力によって引かれ、彗星も〔惑星と〕同じように太陽に向かって重力で引かれていることが、実験と天文学的観測によって普遍的に確定されるならば、この規則にしたがって、物体はすべて相互に重力を及ぼしあう、と言わなければならないであろう。[3]」(傍点筆者)

ところで、ニュートンは「規則Ⅲ」に付した説明のなかで、この規則そのものの根拠に言及している。彼はいわゆる〝第一性質〟をひきあいに出す(延長、不可入性、可動性などがとりあげられている)。

「物体の延長は感覚による以外には知られないし、ありとある物体において知覚されるわけではない。しかし感覚しうるすべての物体において知覚されることから、われわれは他のすべてのものもまた延長をもつとしているのである。[4]」

とすると、「規則Ⅲ」は〝感覚しうる領域〟と〝感覚しえない領域〟との間にアナロジーが成立つという仮定にもとづいていることになるだろう。重力と重力の経験的基礎との間になおこうした〝形而上的な〟仮定が潜んでいることは興味深い事実である。

ただ、規則として述べられた部分が、方法としてただちに積極的な意義をおびる点にも注目する必要があるだろう。

すなわち、「物体の性質は実験(経験)による以外に知られないから」、まず実験(経験)の範囲で認め

れる性質を他のすべてに及ぼせ、それに反する事例が現れたときには、その拡大された経験の範囲ですべてに認められる性質を把握しなおし、それをまた残余のすべてに及ぼせ……以下同様。

そして、ニュートン自身、巨視的な天体の運動について成功をおさめたこの理論と同種のものが、微視的な物質理論においても成功をおさめることに期待を表明するのである。

いずれにせよ、これらの規則は、第三版で追加された「規則Ⅳ」に見られる経験主義的、帰納主義的な姿勢のもとに、方法として適用されることでその価値を発揮すると言えるだろう。たてられた法則の根拠は、実のところ、その法則が経験を統一的に把握することを可能にしているという事実そのものに求められている。

とはいえ、これらの規則が方法として力を発揮するには、たとえば自然界の諸運動の原因であるような〝力〟の存在に対する予想、言いかえれば、自然界の諸運動を同種の結果ととらえることを可能にするような問題設定の枠組がなくてはならない。そのような場面で、「規則Ⅲ」の説明に述べられていた〝第一性質〟に対する考え方――それらが「感覚によって推測される」ということ、感覚との接点を必ずもつという考え方がある役割を果たしているように思われる。

ともかく、ニュートンは『プリンキピア』序文で、てこ、滑車、斜面等の五つの単純機械における「手工的な力」に対して、自然界の運動における「自然的な力」を扱うことを宣言する。

ところで、『プリンキピア』は自然学に数学を全面的に適用することのうえに成立っている著作である。

ニュートンは序文で「自然現象を数学的法則に従わせようとする努力」を「近代人」の特色として指摘する。そして自らもその努力のなかに身をおくのだが、第一巻、第二巻で展開される数学的な理論は、文字通り体系的なもので、たんに〝ケプラーの三法則〟を数学的に証明するといった体のものではない。

他方、ニュートンは微積分法の〝第一発見者〟の栄誉もになっている。「数学と実験の結合」における数学そのものの革新という視点から、ニュートンの数学研究の展開を概観するなかで〝プリンキピアの数学〟への道をたどることにしたい。

運動論(5)

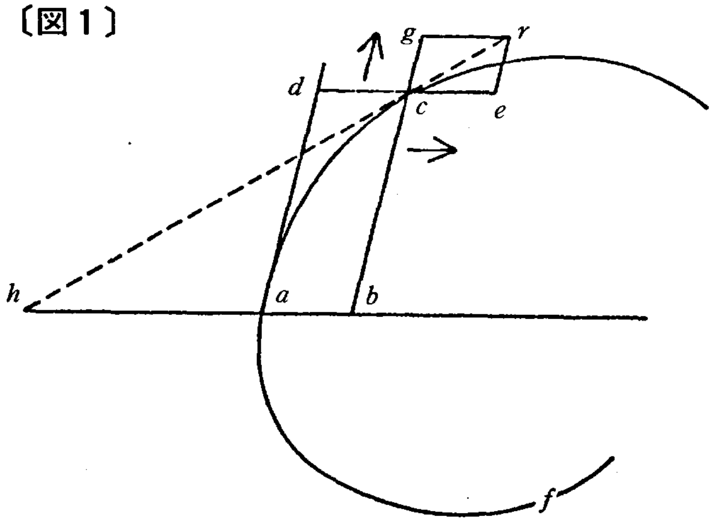
点の運動によって生成されるものとして線を、線の運動によって生成されるものとして面を、そして面の運動によって生成されるものとして立体をとらえる考え方を、ひとまず「運動論」と呼ぶことにすると、後で見るようにこの「運動論的」なアプローチがニュートンの「数学」のなかに占める位置は大きい。例えば〔図1〕のような曲線は、それぞれの直線が矢印の方向に運動する際の交点の軌跡と解されるのである。したがって、曲線を描く点の運動はこの二つの直線の運動から合成されたものと考えられるし、あるいは逆に、点の運動をこの二つの直線の運動する方向に分解することができる。

こうしたとらえ方は、しかし、ニュートンに固有のものではない。運動する点によって曲線が描かれると

いうアイデアそれ自体はギリシャに遡ることができるものであるし、そこでは、いわゆるギリシャ数学の三大問題（与えられた角の三等分線の作図、与えられた立方体の二倍の体積をもつ立方体の作図、円と同面積の正方形の作図）に関連して、コンコイドやシッソイド、クワドラトリクス（求積線、円積線）といった種々の運動論的に定義される曲線が研究されてもいたのである。これらの曲線は、特別に考案された器具によって描かれるがゆえに、機械的曲線（〃あまりに機械的な〃曲線）と呼ばれた。

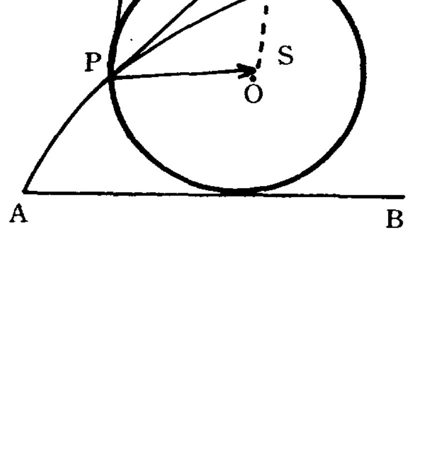
また、運動の合成や分解というアイデアについても、ガリレオやオクスフォードのスコラ学者、さらには遠くアルキメデスに帰すべきものといえる。

〔図1〕



近世において、こうしたとらえ方が新しい様相をおびるのは、ニュートンにやや先行するほぼ同時代の数学者、ロベルヴァル（一六〇二〜一六七五）やトリチェルリ（一六〇八〜一六四七）によってである。彼らは接線の決定法にこの考え方を結びつけ、サイクロイドの接線を求めることに成功する

〔図2〕



〔図２〕。すなわち、接線が運動する点の瞬間速度の方向を表わすと考え、いわゆる〝速度の平行四辺形の規則[6]〟を適用して、速度の方向を求めたのである。

比較の対象としてのデカルト

一方、若きニュートンが自らの数学の創造の過程で刺激を受けつづけた、デカルトの『幾何学』（スホーテンによるラテン語訳第二版、一六五九）のなかにも、これとはまったく別の意味で、「運動する点の軌跡」として曲線をとらえる視点がある役割を果たしているのを見ることができる。

「幾何学的とは的確で精密なもの、機械的とはそうでないものと解し、幾何学はすべての物体の測り方を知る方法を一般的な仕方で教える学問であると見るならば、最も複雑な線もひとつの連続的な運動、または連係していて最後の運動はそれに先立つ諸運動によって完全に規制されるような多数の運動によって描かれると想像されるかぎり、それらの線を最も単純な線以上に退けねばならぬ理由のないことは、きわめて明らかであると私には思われる。なぜならば、この方法によって、つねにそれらの線の測り方について精密な知識をもちうるからである。」（傍点筆者）

　コンパスと定規のみで作図できる「単純な線」が一方にあり、他方に、特別に考案された器具によって描かれるがゆえに「機械的」と呼ばれる線があり、そうした区別との関連が曖昧なままに、幾何学において円

錐曲線（放物線、楕円、双曲線）が確固とした位置を占めているという状況のなかに、デカルトは、ひとつの運動が他のすべての運動を完全に規制するような形で描かれる曲線（「幾何学的曲線」）とそうでないもの（再び「機械的曲線」と呼ばれる）という単一の規準をもちこみ、そのことによって曲線を包括的に扱う新しい視点を手にするのである。円錐曲線はもとより、「機械的」と呼ばれていた曲線の一部（コンコイドやシッソイド）まで含む「幾何学的曲線」とそれ以外のものという新しい切口が現われ、前者については、それを厳密かつ統一的に扱う術があるはずであり、それが求められなければならないということになろう。

周知のように、デカルトはこの問題に対する解答を、二つの未知数を含む解の定まらない方程式が平面上の曲線を表わすという認識に達することによって与える。

「幾何学的と名づけられる線、すなわち何らかの的確で精密な計測を受ける線のすべての点は、必ず、ひとつの直線のすべての点に対してある関係をもち、この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によって表わされうる。[7]」

さらには、

「ひとつの曲線のすべての点が、ある直線のすべての点に対してもつ関係を知っておけば、その曲線の点が他のすべての点や与えられた線に対してもつ関係を見出すこともやさしい。[8]」

こうして、曲線はひとつの方程式で表現することができ、一方その方程式から曲線のすべての性質を導くことができるはずであるという幾何学の代数的な取扱いの可能性が示されるのである。デカルトは、代数記

号を幾何学的な制約から開放したうえで、このことを示したから、そこには、三次、四次の新しい曲線が数学の対象として現われることにもなる。

こうしたいわゆる解析幾何学の基礎をなす見解に達する過程で、「幾何学的曲線」の運動による定義が不可欠であるとは決して言えない。ただデカルトにおいて、ひとつの運動が他のすべての運動を完全に規制する形で描かれる曲線はコンパスで描かれる円と〝同様に〟「幾何学的」であるという確信が、それらを〝同様に〟扱うことのできる方法の存在に対する確信とたえずつながっていたと言うことはできるだろう。

ところで、デカルトにおいて、運動は曲線のいわば生成因と考えられているのだが、ロベルヴァルやトリチェルリにおいては、曲線を描く運動の過程そのものが考察の対象とされていく。この点で両者の間には大きな違いが存在する。言うまでもなく、「運動論的」なアプローチとして問題になるのはこの後者である。そして、「幾何学的曲線」＝「代数曲線」という形で総合がなされたまさにそのことによって、デカルトが、「精密に測りうるいかなる関係ももたない別々の運動によって描かれると考えられるから、まさしく機械的曲線に属す」[9]として、螺線やクワドラトリクスを〝数学〟の対象からしめ出したちょうどその頃、後者の方法がこれらの曲線の研究に対して威力を発揮し始めるのである。

『一六六六年一〇月論文』

さて、いよいよニュートンの「数学」において「運動論的」なアプローチが占める位置を検討する段階である。

ニュートンの数学研究は一六六四年夏頃に始まる。それからわずか二年ほどの間に、彼は同時代の数学を消化吸収したばかりでなく、それにオリジナルな成果をつけ加える。そして一六六六年一〇月、それらの集大成として、のちに彼が「流率法」と名づける微分法と、その逆すなわち、積分法に関する最初のまとまった論文が著されているのである。この論文には表題が付されていないため、通常『一六六六年一〇月論文』(I, pp 400～448)[10]と呼ばれている。

ところで、ニュートンのこの数学的創造に刺激を与えたソースとして次のものを考えることができる。

(I) デカルトの法線決定法およびその改良であるフッデの「極大極小法」(接線決定法)

(II) ウォリスの級数論

(III) フェルマの接線決定法

(IV) ロベルヴァルの運動論的接線決定法(トリチェルリ、スリューズ)

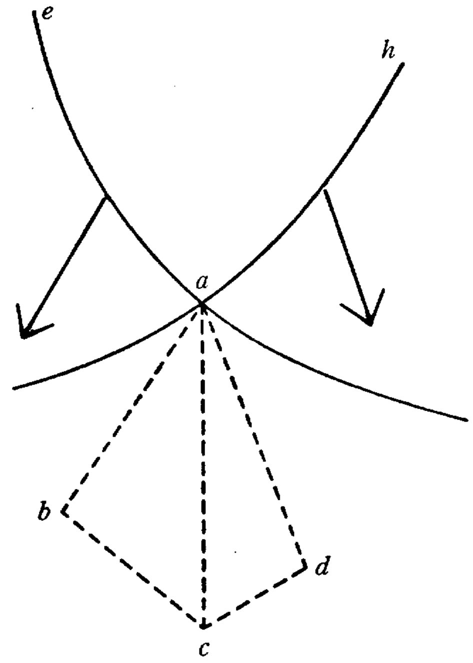
『一〇月論文』にもこれらの〝痕跡〟をたどることができる。この論文は八つの「命題」からなる原理的

な部分と、一七の「問題」からなる応用的な部分から構成されている。「命題七」、「命題八」には、微分と積分の計算法（アルゴリズム）がそれぞれ与えられているが、「命題七」の〝証明〟としてニュートンが与えるのは、ある任意の代数式について自らが示したアルゴリズムによって得られる結果と「フェルマ流の方法」にもとづいて得られる結果が一致するという事実である。(11)

また、「命題七」には普通もちいられる方法として「フッデの方法」が併記されている。接線問題を扱う「問題一」でも、「幾何学的曲線」に対する解法として、やはり自らの解法とフッデ流の解法が併記される。

そして、この論文の原理的な部分を構成する八つの命題は、「諸問題を運動によって解くには以下の命題で足りる」(To resolve Problems by Motion these folowing Propositions are sufficient.) という表題のもとに並べられている。後半は応用的な部分だから、この表題はまた『一〇月論文』そのもののタイトルとも言えるだろう。

〔図3〕



ここでは、その「運動」によって問題を解くうえで中心的な位置を占める「命題六」の検討から始めることにしたい。

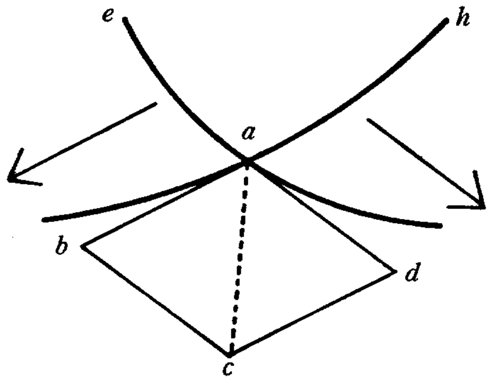
この命題は、二本の曲線 $\overset{\frown}{ae}$, $\overset{\frown}{ah}$ がそれぞれ矢印の方

向に運動した時の交点aの〝瞬間的〟運動の方向と大きさ（あるいは比）が〔図3〕のようにとらえられることを主張している。すなわち、aeが矢印の方向に動くと、その上の点aはaeの運動の方向に平行な成分abをもつだろうし、同時にaはah上の点でもあるので、aにおけるahの接線方向に平行な成分cdをもつといえる。同様にして、ahの運動によってad, bcという成分が考えられる。そして交点aの運動をacが表わしている。また、〔四辺形abcdの各辺および対角線acはある同じ時間間隔における運動を表わしているのだから、それらは速度の方向と大きさを表わすものと見なすことができる。

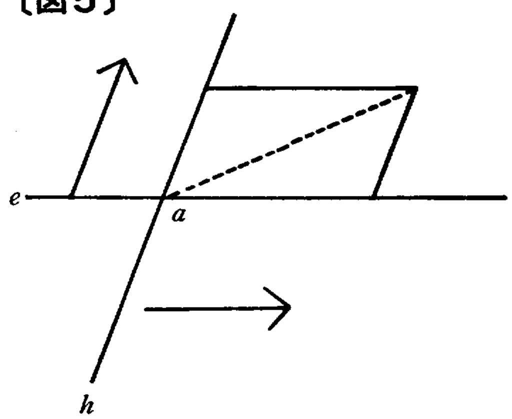
ともかくこの命題によって、例えばabとadが与えられている時、acを合成することができ、この二曲線の運動によってある第三の曲線が描かれるとすれば、acはその曲線の点aにおける接線にほかならない。

ところで、ここで注目しなければならないのは「命題二」との関連である。今検討した「命題六」において、二曲線ae, ahがたがいに他の接線方向に運動したとすると〔図4〕、あるいは、ae, ahが曲線ではなく直線だとすると〔図5〕、運動もしく

〔図4〕



〔図5〕

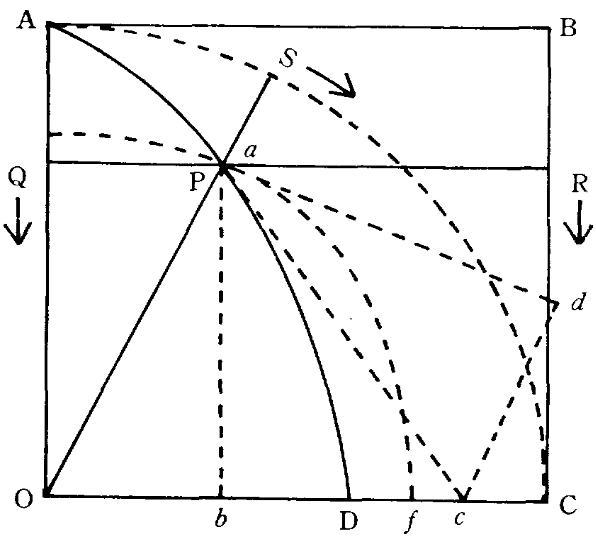


は速度の合成と見なされる ac は平行四辺形の対角線としてえられる。これは〝速度の平行四辺形の規則〟を述べた「命題二」の内容にほかならない。つまり、「命題六」はその特別な場合として「命題二」を含む一般的な内容をもつのである。

これはロベルヴァルが『運動合成と接線発見法についての考察』（1639~1643, ed. 1693）のなかで「一般的規則」として述べた次の事柄に対応する。

「与えられた曲線の特性にもとづいて、その曲線を描く点が接線を引こうとする位置において有する種々の運動を調べよ。これらすべての運動をひとつに合成し、その方向線を引けば、求める接線がえられるであろう。」

〔図6〕



「命題六」における動曲線 $\overset{\frown}{ae}$, $\overset{\frown}{ah}$ が直線である場合を、ロベルヴァルはすでに考察していたと言われる。それはともかくとして、この命題において、〝瞬間的運動〟が幾何学的に明確にとらえられているのである。

ところで、「命題六」をもちいてニュートンは、デカルトが「幾何学的曲線」から排除した曲線の一つ、クワドラトリクスの接線を求めている〔図6〕。

図の正方形 OABC において、動径 OS が A から C まで等

速で回転して四分円を描く間に、線分 QR が AB から OC まで等速で平行移動するものとする。このときの OS と QR の交点 a の描く軌跡がクワドラトリクスである。

この図のなかで「命題六」をそのままたどることができる。「瞬間的運動」において、QR 上の点 a は QR の下方への運動にともなう ab と、OS に平行な cd という運動成分をもち、また OS 上の点 a は OS の回転にともなう、動径に対して垂直にとられる ad と、QR に平行な bc という運動成分をもつ。そして交点 a の運動を ac が表わす。一方、それらの大きさ（比）は OS と QR が等速で同じ時間内に A から C まで、AB から OC まで運動するという条件から導かれる。すなわち、QR 上の点 a が b に達するまでの間に、回転運動をする OS 上の点 a は f に達すると考えられるから、ad を孤 $\overset{\frown}{\mathrm{af}}$ と同じ長さにとることによって、ab, ad を点 a の下方への速度と回転方向への速度の比を表わすものと見ることができる。言いかえれば、図中の四辺形 abcd およびその対角線 ac は点 a の瞬間的運動を比例拡大したものになっているのである。

ここでは、ab, ad の大きさ（比）は、問題の曲線の定義（性質）そのものから導かれているわけだが、デカルトの言う「幾何学的曲線」、つまり代数曲線については、微分のアルゴリズムを与える「命題七」によって、その大きさ（比）が得られることになる。

言いかえれば、〝瞬間的運動〟を幾何学的に明確にとらえる「命題六」はまた、接線問題に対する最も一般的な幾何学的・図形的解法を与えるものであり、そのなかに、変量の速さ（ニュートンは、x の速さ p といった表現をもちいているが、この p が果たしている役割は a の時間微分—dx/dt である）は場所をえるの

である。

もちろん、この「速さ」に大きさを与えるものとして代数的算法が確立されていること、さらには、微分と積分が逆関係にあること（微積分学の基本定理）が明確に示されていること（「問題五」）こそ重要なのだが、「諸問題を運動によって解く」という幾何学的、運動論的なアプローチをとるなかで、微分や積分という形で取扱える問題の範囲が包括的に示されている点によりいっそう注目すべきだろう。求接線、求積といった伝統的な問題の範囲をこえて、曲率中心の決定や変曲点を求める問題、あるいはまた「知られていないばかりでなく、人間には知りえないもの」として、デカルトがこの点では従来のドグマを踏襲し、幾何学の問題から排除した、曲線の求長といった〃ホットな〃問題[12]が統一的に扱われているのである。

『一〇月論文』以後

ところで、デカルトが「幾何学の代数化」を唱え、ウォリスがそれをさらに一歩進めて「幾何学の算術（arithmetica）への従属」を唱えたのに対して、ニュートンはついに幾何学と代数の地位の逆転を前面に押し出すことはなかった。そのことと、ニュートンが「運動論的」な考察のなかで曲線についてのデカルトの分類をこえた一般的な解法を手にしたこととは、あながち関連のないこととは思えないのである。代数的表現をこえた曲線を扱いうる方法を手にしたことが、ニュートンをして、デカルトが示し、ウォリスが追随し

た方向の秘める〝意味〟を見失わせたとすら思えるのである。

「近世の数学」は、アラビヤから移入された〝新しい血〟代数学と、ギリシヤ数学の古典の再発見によって面目を一新した幾何学を結合することに始まる。この結合をまず果たしたのがウィエタ（Vieta 一五四〇～一六〇三）だった。そして、幾何学の代数学への適用、代数学の幾何学への適用が両様あい進められるなかで、デカルトは、ウィエタにおいてなお残っていた代数的記号法における幾何学的制約をとり払う一方、任意の軸上の点と一定の関係にある点の集まりとして曲線がとらえられることを示して、幾何学と代数学の結合をより完全なものにしたのだった。このことが同時に「幾何学の拡大」をもたらしたことはすでに述べたとおりである。

一方、ウォリス（Wallis 一六一六～一七〇三）は、〝πの無限積表示〟で知られる『無限算術』（“Arithmetica Infinitorum”, 1656）において、円の求積問題を、無限数列の和の比を求めるという、純粋に算術的な問題を系統的に論じるなかに位置づけ、同じ時期の『普遍数学』（“Mathesis Universalis”, 1657）では幾何学と代数学の地位の逆転を主張している。

「……普遍代数は幾何学ではなく、真に算術である。したがって幾何学の原理によるよりも算術の原理によって説明されるべきである。実際、多くの事柄が代数の原理によって発見されたり、明瞭にされたりしているとはいえ、そのことから、代数は幾何学である、あるいは幾何学的原理に依存しているとは帰結されない。……むしろ算術と幾何学の密接な親近性（affinitas）のゆえに、あるいはむしろ幾何学が算術に従属し

ている（quasi subordinata）がゆえに、そのことが生ずるのである。したがって算術の普遍的言明をその対象に適用しているのである。」

ニュートンはむしろ、この両者が示した方法を全面的に継承し発展させるのである。ウォリスの『無限算術』（一六六四、冬）からは二項定理を一般的な形で導き、級数展開による項別積分という方法を確立する（無限級数を使った双曲線の面積の計算――一六六五年五月）。そして、この「級数の方法」を『項数が無限の方程式による解析について』（〝De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas〟, II, pp. 206〜247, 1669, ed. 1711）で展開する。

また、微分のアルゴリズムも、「フッデの方法」という代数的な接線決定法と、「運動論的」な考察から導かれる〝瞬間速度〟とを結びつけるなかで見出されたと想定される。

この〝瞬間速度〟に「流率」の名が与えられる『級数と流率の方法について』（〝De Methodis serierum et fluxionum〟, III, pp. 32〜329, 1670〜71, ed.（英）1737,（羅）1779）では、解析幾何的な手法、級数の方法が駆使されるなかで、流率法およびその逆を駆使する「流率の解析学」が全面的に展開されるのである。『十月論文』で前面に出ていた「運動論的」な色彩は、流量（fluens）、流率（fuxio）という基本概念のなかにのみ認められるものとなる。

「時間は何らかの等速的な位置変化によって提示され測定されるのでなければ評価のしようがないし、さらに同種の諸量、したがってまたそのような量の増大または減少のみが相互に比較されうる。これらの理由

により、私は今後客観的に考えられた時間は考慮せず、提示された同種の量のうちどれかが等速的な流れをもって増大すると仮定する。他のすべての量はあたかもこの量が時間であるかのようにこれに関係づけられるのであり、そこで類推によりこの量に時間という名を与えてもよい。[13]」という形でtが消され、流量、流率は変量と変化率と呼べるものに変わっている（ただし技法としてはすでに『十月論文』に現れている）。

しかしながら、記述の整備、扱う問題量の豊富さ、問題の新しい展開、いずれの点でも前二論文をはるかに凌ぐこの論文においてなお、〝幾何学に代数を役立てる〟という姿勢が貫かれているかに見えるのである。[14]正確には、「拡張された幾何学」に代数が役立てられるのであるが、代数が幾何学を拡張したこと自体に対する評価、それを対象化する視点が、ニュートンには欠けていたと見られるのである。先ほど、デカルトやウォリスが示した方向の〝意味〟をニュートンは見失なったと述べたのは、この意味でのことである。

そもそも、デカルトやフェルマにおいて解析幾何学が創始されたといっても、解析幾何学の根本概念である座標や座標軸の概念はなお鮮明にとらえられていたわけではなかった。座標概念の原型はアポロニウスの円錐曲線論に見られ、「直径から切り取られた部分」(abscissa)と「直径に規則正しくたてた線」(linea ordinatim applicata（縦に貼付された線）)とで円錐曲線を扱うその方法は、円錐曲線の座標表現にもとづくものと言えなくもない。ただし、これらの線はあくまで曲線に付随してたてられ、座標軸として任意に設定されるわけではないのである。そこにデカルトがしるした一歩は、任意の直線、すなわち軸上の点に対して、

ある一定の関係をみたす点の集まりとして曲線をとらえたことだった。それが、代数記号の幾何学的次元からの解放のうえになされることにより、二次曲線ばかりでなく、三次、四次の曲線がこの任意の軸に対して平面上に描かれることになったのである。それはまた、この任意の軸上にとられる変量と一定の関係をもって対応する曲線上の点という、関数概念の誕生をも示していた。しかしながら、デカルトのこの一軸座標は実用上アポロニウスの円錐曲線論におけるものと大きな差があるわけではない。任意の軸を曲線に即してとることもまた可能なのだから。任意にとられた横線（abscissa）と縦線（ordinata）を一組のものとしてとらえ、そのなかに曲線を定位するには、また軸上の点と曲線上の点の間の、いわば図形に即した関係を変量の間に成立つ関係としてとらえなおすには、代数化によってもたらされたものの意味を問いなおす理論的な反省、対象化が必要だったと言えるだろう。

ちなみに、この横線と縦線とを座標（lineae coordinatae, coordinatae）と初めて呼んだのはライブニッツであり（一六九二）、明確に数学的な意味で「関数」（functio）という言葉が初めて使われたのは、ライプニッツとヨハン・ベルヌイとの往復書簡においてである（一六九六～九八）[15]。

『曲線の幾何学』（"Geometria Curvilinea", IV. pp. 420～505）への転換

一六八〇年頃の執筆と推定されるこの論文は、一六七一～七二冬の De Methodis に書きくわえられたノ

ートに端を発すると言われる。ニュートンは「ユークリッドの『原論』は曲線の研究に役立たない」ことを指摘して、曲線の研究に役立つ総合的な幾何学の樹立を構想するのである。

この幾何学への回帰は、われわれの目にはどうしても De Methodis からの〝後退〟とうつってしまう。数学の歴史的展開から見るかぎりそれは後退であり、〝ニュートンが見失ったもの〟として指摘した事柄をまさに見失わせるものと言えるだろう。

しかしながら、この試みは「曲線の幾何学」を『原論』に帰着させようとするものでは決してなく、流率法そのものを幾何学として公理化すること、すなわち「流率の幾何学」の創建を目指すものだった。この試み自体は途中で断念されているけれども、同様の試みが具体化されたものとして『プリンキピア』第一巻、第二巻で展開される数学をとらえることができる。

むろん、この幾何学への転換は『プリンキピア』を目指したものと考えるよりも、流率法における〝無限小〟や〝極限〟の概念の曖昧さや論理的難点を解消しようとする意図のもとになされたと考えるべきだろう。あるいは、どのような問題に取組む場合にもニュートンが示す、〝一般化・普遍化への意志〟とでも呼びたくなるようなものが、まず総合的な学である幾何学への転換をうながし、そのことが流率という基本概念の明確化を迫ったとも考えられる。

いずれにしても、この基本概念の明確化の試みは、〝運動〟の直観に訴える形で行なわれるのである。『曲線の幾何学』公理六に、「最初の比」、「最後の比」というとらえ方が初めて示されている。

公理六　量の流率は生まれつつある部分の最初の比にある。あるいは同じことだが、……逆に消えつつある部分の最後の比にある。（後略）

そしてこの言葉は『プリンキピア』第一巻、第一章「それによって以下の命題が証明される最初の比および最後の比の方法について」という表題のなかに再び見出される。

この表題のもとに、ニュートンは一一個の補助定理（lemma）をかかげる。その最も基本的な位置を「補助定理一」が占めている。

補助定理一　任意の有限な時間内に、たえずあい等しくなる方向に向かい、その時間の終わりに近づくほど、ますます任意に与えられた差に対するよりも、たがいに近づく諸量および諸量の比は、最後には等しくなる。

この、極限について述べた補助定理にもとづいてのこりの補助定理が主張される。とくに、補助定理九、一〇、一一では、力、速度、時間相互の基本的な関係が図形的な表象のなかで与えられる。そして、これらを基本的な道具だてとして「変化する線切片の幾何学的な極限の増分が基本的な役割を果たす」(16)ような形で、『プリンキピア』における数学的な理論は展開されるのである。

ところで、「極限」の概念が「補助定理一」によって明確にされているかといえば、むろんそうではない。それは〝任意の小さな量よりも小さな量しかたがいに相違しなくなる二つの幾何学的量はあい等しくなる〟としたステヴィン（一五四八〜一六二〇）による最初の定義とそれほどの差はなく時間や運動といった直観

に訴える定義、厳密化の限界を示しているとさえ思われる。

ただし、現代の知識からそう言えるのであって、ここではむしろ、『プリンキピア』第一巻、第二巻が運動力学的な問題を射程にいれたうえで、文字通り数学的に展開されていることに注目すべきだろう。数学の理論的展開のなかの特別な場合として、自然界の現象との対応が示されることも少なくないのである。

このように見てくると、ニュートンは『曲線の幾何学』をひとつのステップとして、『プリンキピア』のために数学の体系的な展開を新たに用意したとさえ思われるのである。

『プリンキピア』が力学の創造として、また数学の自然学への適用の確固たる有効性を示すものとして君臨するのに対して、そのために用意された数学――「流率の幾何学」は普遍的な価値をもちえなかったように見える。

どちらも、普遍化、体系化を目指したものであるだけに、興味深い事実である。

おわりに

極限の概念が論理的な分析を通じて明確にとらえられるのは、一九世紀、コーシーの登場をまたなければならない。この概念を運動の直観によってとらえることの限界のゆえに、流率法の幾何学化・公理化という、『曲線の幾何学』におけるニュートンのもくろみは、ある意味で、当初から成功の道を断たれていたと言え

るだろう。

ただ、この試みが提供する幾何学的空間と、運動学・力学の場としての「絶対空間」とが重なりあうなかで、数学の自然学への適用がトータルな形で行なわれたことは、数学そのものの展開とは別のレベルでの一大成果をもたらしたのだった。数学のうえではむしろ〝躓きの石〟であったものが、自然学・力学では〝成功の鍵〟となった――という気取った言い方がゆるされるかもしれない。

類型的な場合を一般的に取扱うことによって、可能な場合をすべて包括しようとする姿勢を〝学問〟への志向性と解するとすれば、それをニュートンにおいてつねに認めることができる。だが、そうした姿勢がどのような着想のもとに貫かれるかによって、もたらされる結果はまた様々である。運動の直観にもとづく二様の展開を、デカルトとニュートンについてわれわれは見たわけだが、両者の差はこの直観の質の差に起因すると言えるだろう。

ニュートンは、言ってみれば、瞬間的運動の概念を数学のなかにもちこんだロベルヴァル以来の近世数学の土壌のなかで、まず、微分概念に相当する流率概念に到達し、その土壌のうえで流率法を展開する。そして幾何学への転換において、この流率概念は直観に訴えるレベルで定位しなおされ、自然学に結びつけられる。もちろん、〝自然〟を前にして、ニュートンが先の〝学問〟への志向性に忠実であろうとするとき、一般的には、「神は幾何学する」というガリレオ以来の〝信念〟がその試みを支えていることは言うまでもない。

しかし、具体的にこの試みを推進するのは、瞬間的運動の概念であり、それに由来する瞬間的な速さや瞬間

的な力（衝撃力）である。言いかえれば、数学の展開においても、自然学・力学の展開においても、素朴な直観との接点が保持されている。そこに、『プリンキピア』――「哲学するための規則」――「規則Ⅲ」の説明のなかに示された〝第一性質〟に対する考え方と軌を一にするものを見ることができると言えるだろう。
どんなに抽象的な概念も、必ず感覚との接点を有するというこの考え方が、数学においては、運動の直観もしくは幾何学的直観からの飛翔を制約し、自然学においてはより着実な結合をうながしたと言えるのではないだろうか。

注

（1）正確には『二つの新しい科学についての議論と数学的証明』（"Discorsi e demonstrazioni mathematiche intorno à sopra due nuove scienze", 1638).
cf. Two New Sciences, translated by Drake, The Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1974 引用箇所は pp. 158~159.

（2）Newton: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1726 Edition's Reprint, Glasgow Univ. 1871.
cf. Newton's Principia Motte's translation (1729), Revised by Cajori, Univ. of California Press, 2 Vols, 1934, p. 408. 河辺六男訳：『自然哲学の数学的諸原理』、世界の名著二六、ニュートン、中央公論社（一九七一）、四二六頁

（3）Ibid. pp. 399~400. 邦訳四一六~四一七頁

（4）Ibid. p. 399 邦訳四一六頁

（5）具体的に物体の運動を扱う〝運動学・力学〟と区別して、〝運動論〟と言うことにする。

（6）この規則において速度のベクトル性がとらえられていることになるが、ロベルヴァルやトリチェルリにおいて瞬間速度の概念は明確には存在せず、速度の合成によってえられるのは瞬間速度の方向であって、必ずしもその大きさではない。

（7）Descartes : La géométrie, Oeuvres des Descartes publiés par Ch. Adam et P. Tannery, Paris (1964～1977), p. 389. 原亨吉訳：『幾何学』、デカルト著作集、白水社（一九七三）、一七頁

（8）Ibid. p. 392.　邦訳一九頁

Ibid. p. 412.　邦訳三一頁

（9）Ibid. p. 389.　邦訳一七頁

（10）（ ）内は、“The Mathematical Papers of Isaac Newton”, Ed. by D.T. Whiteside, Cambr. Univ. Press, 8 Vols, (1967～1980) 所収の巻数（ローマ数字）、ページ数を表わす。

（11）フェルマの微小量‘e’にあたる‘o’（オミクロン）を導入して、ニュートンは「命題七」を〝証明〟する。すなわち、ある瞬間（moment）におけるxの速さ、同じ瞬間におけるyの速さを、それぞれ p, q とすると、次の瞬間には po, qo の線が描かれる――これを補助定理としてあげたのち、〝証明〟として次の計算例が示されている。

x, y の関係式　　$x^3-abx+a^3-dy^2=0$

x, y に $x+po,\ y+qo$ を代入する

$$(x+po)^3-ab(x+po)+a^3-d(y+qo)^2=0$$

$$3\,pox^2+3\,p^2o^2x+p^3o^3-abpo-2\,dqoy-dq^2o^2=0$$

oで割る　　$3\,px^2+3\,p^2ox+p^3o^2-abp-2\,dqy-dq^2o=0$

oが残っている項をオミットする　　$3\,px^2-abp-2\,dqy=0$

この式は「命題7」によってえられる形をもつ。

(12) 曲線の求長は、円の場合をのぞき、ギリシャ以来ほとんど顧みられることがなかった。この点でも先鞭をつけたのはロベルヴァルとトリチェルリだった。前者はサイクロイドの求長に成功したと言われ（一六四〇年頃）、後者は対数スパイラルの求長に成功した（一六四五年）。ただし、いずれの成果も研究者の間に知られることはなく、この問題が脚光をあびるのは、ホイヘンスが放物線の求長に成功し（一六五七年）、パスカルがサイクロイドに関して提出した問題に刺激されて、レンがその求長に成功（一六五八年）して以来のことである。

ニュートンとの関連では、『幾何学』に付されたスホーテンの注釈にヒュラエの求長法が紹介されているのが注目される。

(13) Newton: “The Mathematical Papers of Isaac Newton”, Ed. by D.T. Whiteside, Cambr. Univ. Press, Vol. III, p. 73.

(14) 例えば、螺線の曲率中心を求める場合、ニュートンは巧みに図形に即して流量 x, y, z……を設定し、それぞれの流率 p, q, r……を表象する微小線分（po, qo, ro……）をとり、それらと法線との間にできる相似図形の比例関係に着目して曲率半径をこれら流量、流率で表現する。

また、求められるものが曲率半径そのものではなく、それを斜辺とする直角三角形の対辺の一つであることに見られるように、ニュートンの関心は曲率半径によって曲率を表現すること以上に、曲率中心の作図に必要な長さを決定することにあるように見える。

(15) ニュートンには、「関数」概念は明確な形では現われなかった。その影響で、その後もこのことが当時のイギリスの数学の特徴の一つとなったと言われる。

(16) D.T. Whiteside: The mathematical principles underlying Newton’s Principia Mathematica, “Journal for the history of astronomy”, 1, (1970) pp. 116〜138.