駒澤短期大学放射線科論集　第20号（1995）

パルサーと重力波
四重極公式

(平成7年3月25日受付)

清水忠良

重力波の存在を間接的に示す実験があるという。

PSR1913+16という名前のパルサーのデーターがそれを示しているという。

このデーターは一般相対論の予言する公式にピッタリ合うということになっている。

この議論の主役は四重極公式およびその応用モデルである。この主張はデーター発表以来、公式の有効性をめぐり多くの議論を呼び（10年ほど前）、最近再び（さらに精密化され）議論されている。そこで本稿ではこの公式の由来を最も短いルートで辿ってみる。ことの性格上、歴史の順序には従わない。論理的な道筋に重点をおくつもりである。

導くべき公式は以下の　A，B，C　である。

A：　$-dE/dt=(G/45c^5)Q_{kl}Q_{kl}$

B：　$-dE/dt=(32/5)(G^4M^3\mu^2/c^5M^3)f(e)$

C：　$-(dT/dt)/T=(96/5)(G^3M^2\mu/c^5a^4)f(e)$

1．四重極公式

公式Aは通常「四重極公式」と呼ばれている。

アインシュタイン方程式は

$$G^{\mu\nu}=-\kappa T^{\mu\nu}$$

であり（$\kappa=8\pi G$）、第1次近似（線形近似）では

$$G^{\mu\nu}=(1/2)\Box\gamma^{\mu\nu}$$

であるから、第一次近似のアインシュタイン方程式は以下のようになる。

$$\Box\gamma^{\mu\nu}=-2\kappa T^{\mu\nu} \qquad (A-1)$$

となる。これはポアッソン方程式方だから、解は求まって、

$$\gamma^{\mu\nu}(t,X)=-\kappa/2\pi\int T^{\mu\nu}(x^0-|x-x'|,x')/|x-x'|d^3V' \qquad (A-2)$$

$|x| \gg |x'|$として分母を展開して

$$\gamma^{\mu\nu}(t,X)=-\kappa/2\pi R\int T^{\mu\nu}(t-|x-x'|,x')d^3V' \qquad (A-3)$$

となる。ここで　$R=|x|$である。

註：一次近似ではリーマン計量はミンコフスキー計量になり、添え字の上下は符号だけの違いになる。添字のギリシャ文字は4次元ミンコフスキー空間で、$\mu=(0、1、2、3)$、；ローマ字は3次元ユークリッド空間で、i＝（1、2、3)。

また以下では煩雑を避けるためにX'の［'］と$T\mu\nu$の変数もしばらくの間、省略して明記しない。すなわち

$$\int T^{\mu\nu}d^3V=\int T^{\mu\nu}(t-|x-x'|,x')d^3V' \qquad (A-4):$$

まず、(3)の右辺の積分を実行する。このとき、物質のエネルギー運動量テンソル$T\mu\nu$の保存公式

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0 \qquad (A-5)$$

の近似式（$\nabla_\nu \rightarrow \partial_\nu$と置き換える）から得た次の等式を使う。

$$\partial_\nu T^{\mu\nu}=0 \qquad (A-6)$$

（A－6）において、$\mu=0$とおき、X^lを掛けて、全空間積分を実行する。

部分積分を実行して次の等式を得る。

$$\partial_0\int X^l T^{\mu 0}d^3V=\int T^{l\mu}d^3V \qquad (A-7)$$

再び、(A－6)において、$\mu=0$とおき、$x^k x^l$を掛けて、全空間積分を実行する。同様に部分積分を実行して次の等式を得る。

$$(\partial_0)^2\int X^k X^l T^{00}d^3V=2\int T^{lk}d^3V \qquad (A-8)$$

エネルギー運動量テンソルの(00)成分(T^{00})は第一次近似では質量密度であるから、（A－3）式は次のようになる。

$$\gamma^{lk}(t,X)=-\ [(\kappa/4\pi R)]\cdot[(\partial_0)^2\int\rho X^k X^l d^3V] \qquad (A-9)$$

次の量を定義する（質量テンソル密度）。

$$I^{lk}\equiv\int\rho(X^kX^l)d^3V \qquad (A-10)$$

$$Q^{lk}\equiv\int\rho(X^kX^l-1/3\cdot\delta^{lk}r^2)d^3V \qquad (A-11)$$

もし、球対称物質分布成分が時間依存性がないとすれば、（A－11）の最後の項は消える。
この仮定のもとでは
$(\partial_0)^2I^{lk}=(\partial_0)^2Q^{lk}$；ただし、以下ではこれは仮定しない。付録参照：
（A－9）は次のように書き直される。

$$\gamma^{lk}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{lk} \qquad (A-12)$$

$$\gamma^{22}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{22} \qquad (A-13a)$$

$$\gamma^{33}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{33} \qquad (A-13b)$$

$$\gamma^{23}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{23} \qquad (A-13c)$$

重力場の（物質ではない）エネルギー運動量テンソル$t_{\mu\nu}$の定義は諸説ある。また、ゲージの取り方についても諸説ある。原理論としても(古典論の範囲に限っても)、決着のついていない大きな問題点である。

線形近似の範囲では幸いなことにあまり神経を使わなくてもよいと言われている。そこでここでは、とりあえずアインシュタインのものを用いて議論を進める。

$$4\kappa t^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu\gamma_{\alpha\beta}\partial^\nu\gamma_{\alpha\beta}-1/2\cdot\partial^\mu\gamma\partial^\mu\gamma-1/2\delta^{\mu\nu}\ \{(\partial^\mu\gamma_{\alpha\beta})^2-1/2(\partial^\mu\gamma)^2\} \qquad (A-14)$$

波動がx^1軸の方に進むとすれば

$$4\kappa t^{41}=\partial_4\gamma_{\alpha\beta}\partial_1\gamma_{\alpha\beta}-1/2\cdot\partial_4\gamma\partial_1\gamma \qquad (A-15)$$

アインシュタインは$\gamma^{\mu\nu}$を求めるために次のような仮定をした。

註：ここではアインシュタインの論文での表記で記述しておく。彼は虚数表記を用いた。書き換えは宿題としよう。ただし、アインシュタインのミスプリント(計算ミス)は直してある。：

$$\gamma^{\mu\nu}=\beta^{\mu\nu}\cdot f(x^1+ix^4) \qquad (A-16)$$

ここで$\beta_{\mu\nu}$は実定数で、fは変数（x^1+ix^4）の実関数である。
f'は変数（x^1+ix^4）についての微分である。
採用するゲージ条件は$\beta_{\mu 1}+i\beta_{\mu 4}=0$とする。すなわち、

$\mu=1$　のとき、$\beta_{11}+i\beta_{14}=0$

$\mu=2$　のとき、$\beta_{21}+i\beta_{24}=0$

$\mu=3$　のとき、$\beta_{31}+i\beta_{34}=0$

$\mu=4$　のとき、$\beta_{41}+i\beta_{44}=0$

（A－15）の右辺は次のように変形される。

$$\partial^4\gamma_{\alpha\beta}{}^1\gamma_{\alpha\beta}-1/2\cdot\partial^4\gamma\partial^1\gamma$$
$$=i(f')^2(\beta_{\alpha\beta}\beta_{\alpha\beta}-1/2\cdot\beta_{\alpha\alpha}\beta_{\beta\beta})$$
$$=i(f')^2\ \{1/2(\beta_{22}-\beta_{33})^2+2(\beta_{23})^2\}$$
$$=2i(f')^2\ [\{(\beta_{22}-\beta_{33})/2\}^2+(\beta_{23})^2] \qquad (A-17)$$

さらに、$\partial_0\gamma^{lk}\equiv\beta^{lk}$、とすれば、その結果（A－18）を得る。

$$4kt^{01}=2(f')^2\ [\{(\beta^{22}-\beta^{33})/2\}^2+(\beta^{23})^2] \qquad (A-18)$$

この表現を最初に導いたのはアインシュタインである［E；1918；16式］。
重力波は平面波であるとすれば、
$f=EXP(\cdot)$だから、$(f')^2=(\dot{f})^2$となり、γ^{lk}の空間微分は時間微分に代えられる。

$$4\kappa t^{01}=2\cdot[\{(\dot{\gamma}^{22}-\dot{\gamma}^{33})/2\}^2+(\dot{\gamma}^{23})^2] \qquad (A-18')$$
$$\gamma^{22}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{22}$$
$$\gamma^{33}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{33}$$
$$\gamma^{23}(t,X)=-\ [\kappa/4\pi R]\ (\partial_0)^2I^{23}$$

$K^{lk}\equiv 3(\partial_0)^3I^{lk}$と置くと、

$$4\kappa t^{01}=(2/9)\ [\kappa/4\pi R]^2\ [\{(K^{33}-K^{22})/2\}^2+(K^{23})^2]$$

すなわち、

$$t^{01}=\kappa/(2\cdot 9\ [4\pi R]^2)\ [\{(K^{33}-K^{22})/2\}^2+(K^{23})^2] \qquad (A-20)$$

今までの計算は、波がX^1方向に伝搬するものとしての結果である。
つぎに、任意の方向の波についての表現を得たい。そのために次のトリックを使う。
$N=\{N^k\}$なる単位ベクトルを用意し、次の量を考える。

$S \equiv -1/4(K_{kk})^2 + 1/2(K_{\kappa\kappa}) \cdot (K_{kl}N^kN^l) +$
$1/4(K_{kl}N^kN^l)^2 + 1/2 \cdot K_{kl}K^{kl} - K_{kl}N^lK_{km}N^m$ (A−21)

この量は $\{N^k\}$ が（1、0、0）なる単位ベクトルであれば、この量はつぎの表現に一致する。

$$[\{(K^{33}-K^{22})/2\}^2 + (K^{23})^2]$$

註：3次元ユークリッド空間では添え字の上下は自由に実行できる。Nとの組み合わせでは上下に足をつけて和を表わした。以後、この略記法を使う。：

そこで、この量を任意の方向での表現とする。さらに、波がすべての方向に出ているとして、その全体の計算に以下の平均操作を行う。　その操作には次の公式を使う．

$1/(4\pi)\int d\Omega = 1$ (A−22)
$1/(4\pi)\int N^kN^l d\Omega = 1/3\delta^{kl}$
$1/(4\pi)N^kN^lN^mN^r d\Omega =$
$= 1/15 \cdot (\delta^{kl}\delta^{mr} + \delta^{km}\delta^{lr} + \delta^{kr}\delta^{lm})$

註：15なる係数は3次元では｛k,l,m,n｝のうちどれかは同じものである。そのさい、前の公式が成立するように選んだ結果として得られる。：

式（21）に式（22）を使うと、以下の式が得られる。
$S = (1/5) \cdot (K_{kl}K^{kl} - 1/3(K_{kk})^2)$

これで運動量の流れ、すなわちエネルギーは計算でき、以下のようになる。

$t^{01} = 2 \cdot [\{(\dot{\gamma}^{22} - \dot{\gamma}^{33})/2\}^2 + (\dot{\gamma}^{23})^2]$
$= \kappa/(2 \cdot 9 \cdot [4\pi R]^2) \cdot [\{(K^{33}-K^{22})/2\}^2 + (K^{23})^2]$
$= (\kappa/8\pi \cdot 45)\ [1/4\pi R^2]\ [\{(K^{33}-K^{22})/2\}^2 + (K^{23})^2]$

$\kappa = 8\pi G$であるから
$t^{10} = 1/(4\pi R^2) \cdot G/45 \cdot (K_{kl}K^{kl} - 1/3(K_{kk})^2)$ (A−24)

Rの半径の領域に放出される重力波エネルギーは$4\pi R^2$を掛けて、物質系の質量密度テンソルの3階微分として求まった。したがって物質系のエネルギーの損失は次のように表現された。

$$-dE/dt=G/(45c^5)\cdot\{K_{kl}K^{kl}-1/3(K_{kk})^2\} \qquad (A-25)$$

註：c^5は$x^0=ct$としたところから来るものである。(A－25) が有名な四重極関係式（あるいは公式）と呼ばれるものである。

ここで、(A－11) によってQを定義した式を用いると、

$$Q^{lk}\equiv\int\rho(\cdot X^kX^l-1/3\delta^{lk}r^2)d^3V$$

(A－25) 式は，$TK^{lk}\equiv(\partial_0)^3Q^{lk}$と置くと、

$$-dE/dt=G/(45c^5)\cdot(TK_{kl}TK^{kl}) \qquad (A-25)$$

との表現にもなる。

四重極関係式（あるいは公式）なる命名はここから来たものと思われる。

B　質量テンソルの計算（A→B）

質量が各々、m_1、m_2の2体のテンソルを計算する。

物体の運動は本来なら、一般相対論を使って計算すべきであるが、ニュートン力学が近似的に成立するものとして、ケプラーの法則を借用する。

そこで、一般相対論の第０近似としてのニュートン力学のまとめ。

註：ここからは添え字は３次元ユークリッド空間のものであるから、添え字の上下の区別には意味がない。：

２体の間の距離をrとする。重心系を用意し重心からの物体への距離、r_1、r_2は次のようになる。

$$r_1=m_2/M\cdot r\,;\ r_2=m_1/M\cdot r \qquad (B-1)$$

rはrの大きさ（絶対値)、$M\equiv m_1+m_2$である。

$$r_1=(x_1、y_1、z_1)=(r_1\cdot\cos\theta、r_1\cdot\sin\theta、0) \qquad (B-2a)$$

$$r_2=(x_2、y_2、z_2)=(r_1\cdot\cos\theta、-r_1\cdot\sin\theta、0) \qquad (B-2b)$$

ニュートン力学では、2体系の角運動量（Lz)、長軸半径（a）と全エネルギー（E)、離心率（e)、同形動径方向変数（r)、変位角度（θ）との間には次の関係が成立している。

$$Lz=(m_1 \cdot m_2/M) \cdot r^2 \cdot \dot{\theta} \qquad (B-3)$$

$$a=-m_1 \cdot m_2/2E \qquad (B-4)$$

$$r=a(1-e^2)/(1+e \cdot \cos\theta) \qquad (B-5)$$

$$E=(m_1 \cdot m_2/2M) \cdot \{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2\}-G \cdot m_1 \cdot m_2/r \qquad (B-6)$$

$$1-e^2=-EM(Lz)^2/G^2(m_1 \cdot m_2)^3 \qquad (B-7)$$

J^{lk}を計算する。定義は

$$J^{lk}=\int\rho(x)X^lX^kd^3V \qquad (B-8)$$

ここでρは物質密度である。もし物体がいま考えている系ではほとんど点と見なすことができるとする。そのときには次のように表現される。

$$\rho(X)=m_1 \cdot \delta^3(X-r_1)+m_2 \cdot \delta^3(X-r_2)$$

I^{lk}の計算例

$$\begin{aligned} I^{xx}&=m_1 \cdot (X_1)^2+m_2 \cdot (X_2)^2 \\ &=(m_1 \cdot m_2/M) \cdot r^2 \cdot (\cos\theta)^2 \qquad (B-9) \end{aligned}$$

同様の計算から

$$\begin{aligned} I^{xy}&=m_1 \cdot (X_1Y_1)+m_2 \cdot (X_2XY_2) \\ &=(m_1 \cdot m_2/M) \cdot r^2 \cdot (\cos\theta \cdot \sin\theta) \qquad (B-10) \end{aligned}$$

同じようにI^{yy}、I^{xy}が計算できる。
改めて、まとめて書くと

$$I^{xx}=(m_1 \cdot m_2/M) \cdot r^2 \cdot (\cos\theta)^2 \qquad (B-9)$$

$$I^{xy}=(m_1 \cdot m_2/M) \cdot r^2 \cdot (\cos\theta \cdot \sin\theta) \qquad (B-10)$$

$$I^{yy}=(m_1 \cdot m_2/M) \cdot r^2 \cdot (\sin\theta)^2 \qquad (B-11)$$

われわれの表現ではK^{lk}をI^{lk}を時間で３階微分したものとした。
（B－９、10、11）式において、時間微分を実行する。
このとき（r、θ）の時間微分には次ぎの式を使う

$$\dot{\theta}=[M \cdot a(1-e^2)]^{1/2}/r^2 \qquad (B-12)$$

$\dot{r}=e\cdot\sin\theta\ [M/a(1-e^2)]^{1/2}$ (B−13)

ここで（B−12)、(B−13) は厳密にはニュートン力学を越えている点に注意すべきである。

計算例

$I^{xx}\equiv\partial t(I^{xx})$

$=(m_1\cdot m_2/M)\cdot r\cdot\cos\theta\cdot 2\cdot(r\cdot\cos\theta-r\cdot\sin\theta\cdot\theta)$

$=(m_1\cdot m_2/M)\cdot r\cdot\cos\theta\cdot 2\cdot$

$\cdot[(e\cdot\sin\theta\ [M/a(1-e^2)]^{1/2})\cdot\cos\theta-r\cdot\sin\theta\cdot\{[M\cdot a(1-e^2)]^{1/2}/r^2\}]$

$=2(m_1\cdot m_2/M)\cdot M^{1/2}\cdot r\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot$

$\cdot[(e\cdot[1/a(1-e^2)]^{1/2})\cdot\cos\theta-\{[a(1-e^2)]^{1/2}/r\}]$

$=2(m_1\cdot m_2/M)\cdot M^{1/2}\cdot r\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot[1/a(1-e^2)]^{1/2}$

$\cdot[\{e\cdot\cos\theta-\{a(1-e^2)/r\}]$

$=2(m_1\cdot m_2)\cdot r\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot[M\cdot a(1-e^2)]^{-1/2}$

$\cdot[e\cdot\cos\theta-\{a(1-e^2)/r\}]$

(5) を使うと、$1/r=\{(1+e\cdot\cos\theta)/\{a(1-e^2)\}$、であるから、

$[e\cdot\cos\theta-\{a(1-e^2)/r\}]=-1$

従って次式を得る。

$I^{xx}=\{-2(m_1\cdot m_2)/[Ma(1-e^2)]^{1/2}\}\ r\cos\theta\sin\theta$ (B−14)

同様の計算を繰り返すと以下の結果を得る。

$\partial t(I^{xx})=(\partial t)^2(I^{xx})$

$=\{-2(m_1\cdot m_2)/[a(1-e^2)]\}\ (\cos 2\theta+e\sin^3\theta)$

$(\partial t)^3(I^{xx})$
$= \{2(m_1 \cdot m_2)/[a(1-e^2)]\}\ (2\sin 2\theta + 3e\cos^2\theta\sin\theta) \cdot \dot{\theta}$　　(B－15)

$(\partial t)^3(I^{yy})$
$= \{-2(m_1 \cdot m_2)/[a(1-e^2)]\}$
$\cdot (2\sin 2\theta + e\sin\theta + 3e\cos^2\theta\sin\theta) \cdot \dot{\theta}$　　(B－16)

$(\partial t)^3(I^{xy})$
$= \{-2(m_1 \cdot m_2)/[a(1-e^2)]\}$
$\cdot (2\cos 2\theta - e\cos\theta + 3e\cos^3\theta) \cdot \dot{\theta}$　　(B－17)

$(\partial t)^3(I) \equiv (\partial t)^3(I^{xx}) + (\partial t)^3(I^{yy})$
$= \{-2(m_1 \cdot m_2)/[a(1-e^2)]\} \cdot e\sin\theta \cdot \dot{\theta}$　　(B－18)

2次元では（A-25）は

$(\partial t)^3(I^{xx} + 2I^{xy} + I^{yy} - 1/3(I)^2\}$
$= (8/3)\ \{(m_1 \cdot m_2)/[a(1-e^2)]\}^2 \cdot \{12(1+e \cdot \cos\theta)^2 + e^2 \cdot \sin^2\theta\}) \cdot \dot{\theta}^2$　　(B－19)

ここで、エネルギーの損失を計算するのに、1周期当りの平均を計算する。

$<dE/dt> \equiv (1/T)\int(dE/dt)$
$= (1/T)\int(dE/dt)\,(dt/d\theta)\,d\theta$
$= (1/T)\int(dE/dt)\ \{1/(d\theta/dt)\}\ d\theta$

（B－19）の表現に（$\dot{\theta}$）を残しておいたのはこの計算のためである。
ここで周期として、近似式（ケプラー第３法則）を使う。

$(2\pi/T)^2 = (GM/a^3)$

いささか長い単純計算を繰り返し実行すると次式を得る

$-<dE/dt> = (32/5) \cdot (G^4M^3\mu^2/c^5a^5) \cdot f(e)$

これが公式（B）である。
ここでf(e)はうまい具合に離心率(e)のみの関数である。

$$f(e)=\{1+(73/24)e^2+(37/96)e^4\}/[1-e^2]^{7/2}$$

この関数はe依存性が強く、$e=0.5$では約$f=10$という大きな値になる(PSR1913+16はeが0.617であると言われている。このときは、$f=11.8$を与える。なお円は離心率は0である。このとき$f(0)=1$である。

このことは、円から摂動論でこの種の値を出すことはほぼ絶望的であることを示唆するものであると思う(出来るという人もいる)。:

公式(B→C)は一直線であるから省略する。

3．連星系の重力波放出

実験的重力理論では、古典力学、特殊相対論、一般相対論が組み合あさって構成される。各々がドンピシャと解けるわけではないから近似法が大きな論点となる。この問題は連星パルサーが発見されてから近似法をめぐっての論争は現実の意味を持ち始めた。重力波の議論の中心課題の一つは連星パルサー系の動径変化率、あるいは周期変動率が中心課題であろう(動径変化率、周期変動率は日本語として定着した専門用語ではない。便宜的に使っている)。

公式B→Cについて

2体の重心系での重力を考える。静止質量を各々M_1、M_2とする。

長半径をa、離心率をe、全エネルギーをE、角運動量をL、Ωを角速度、Tを周期と表わす。

1：$M_1 \cdot a_1=M_2 \cdot a_2=\mu a$

2：$\mu \equiv M_1 \cdot M_2/M$、$M \equiv M_1+M_2$

3：$\Omega^2=GM/a^3$、$\Omega \equiv 2\pi/T$

4：$a=-G\mu M/2E$

5：$1-e^2=-2EL_z{}^2M/G^2\mu^3M^2$

1、2式は重心系、換算質量、および全質量の定義で、3はケプラーの第3法則、4はエネルギー保存則から導いたもの、5は3と4とケプラーから得られる。

1：2体の重心系を考えた。

2：ケプラーの第3法則を使った。

3：ビリアル定理を使った。

4：周期と動径変数が時間に対して依存してもケプラーの第3法則が形式としては変わらな

い（アディアバディック近似）と仮定する。

以上はほとんどの研究者グループが使う仮定である。

1から4までは論理的には性質の異なるものである。特に3、4は近似計算の結果として使うべき範囲が決まるものである。計算の最初から仮定するべきではない。

実験的重力理論では極く一部の特殊な問題を除き、方程式の厳密解は求まっていない。今のところ近似に近似を重ねる以外に方法は無い。これらの方法をポスト・ニュートン、あるいはポスト・ミンコフスキー近似と名付けられている。

3）より $(T/2\pi)^2 = a^3/GM$

周期T、長径半径aが時間依存性をもっているとする。

しかもその時、方程式の形は変わらないとする。

3）式を時間で微分すると

$$2T(dT/dt)/(2\pi)^2 = 3a^2(da/dt)/GM \qquad (6)$$

両式を3）式で割ると

$$2(dT/dt)/T = 3(da/dt)/a \qquad (7)$$

4）を同じ仮定で時間微分すると

$$:(da/dt) = (G\mu M/2E^2)(dE/dt) \qquad (8)$$

4）式で（8）式の両辺を割ると9）式となる。

$$(da/dt)/a = -(1/E)(dE/dt) \qquad (9)$$

9）式を（7）式に代入して（10）式を得る。

$$2(dT/dt)/T = -3(1/E)(dE/dt) \qquad (10)$$

10）の右辺の計算（dE/dt）に先に述べた公式Bを使う。

$$(dT/dt)/T = 3(1/2E)(32/5)(G^4M^3\mu^2/c^5a^5)\cdot f(e) \qquad (11)$$

4）式を使って整理すると待望の公式Cを得る。

$$-(dT/dt)T = (96/5)(G^3M^2\mu/c^5a^4)\cdot f(e) \qquad \mathrm{C}$$

さて、問題はここから始まった。

付録

（A－11）の表現は球対称物質分布成分が時間依存性がないと仮定した。

この条件が満たされないときには表現は本来変わるのである。

技術的にも一つの争点であった。実際の応用例ではこの仮定は満たされてはいないにも関わらず、妥協的意見として結果は正いものとして使われてきたいきさつがある。用語の乱用もあったようである。

諸文献ではこの点の記述はさまざまである。

そこで、ここで混乱（と筆者が思う）の一つの傍証を試みよう。

1.用語の問題：「慣性モーメント」：「四重極モーメント」

A「慣性モーメント」：

$$I^{lk} \equiv 3\int \rho\,(X^k X^l)\,d^3V$$

B「四重極モーメント」：

$$Q^{lk} \equiv 3\int \rho\,(X^k X^l - 1/3 \cdot \delta^{lk} r^2)\,d^3V$$

紛らわしい点は（A－20）の［・］にある。すなわち、

$$[\{(K^{33}-K^{22})/2\}^2 + (K^{23})^2]$$

という表現の中で、I^{lk}とQ^{lk}との組み合わせは

$$I^{22}-I^{33}=Q^{22}-Q^{33},\quad I^{23}=Q^{23}$$

となり、どちらでもよい。しかもこの等式は球対称の時間性依存性の如何に関わらず、恒等的に成立する。従って、（A－20）式が「四重極モーメント」に関するものとして考えるか、「慣性モーメント」に関するものと考えるかこの場面ではどちらでもよい。ただし、最後の表現形式が変わる。不幸なことに、この理論を連星パルサーに応用しようとした初期、「四重極モーメント」なる用語が多用された（現在もそのように考える人もいる）。その上、これを基本量と考えたらしい。ここで「らしい」というのは、これらの基本文献では、難しい定義の問題は別にしても、

「derivations and proofs are omitted」,

「demands too much space to be reproduce here」,

「a quite lengthy calculation using (・) gives」

等という表現を用いている。そこで「らしい」との推測をした。

2．エネルギーの流れ

この表現も紛らわしい。t^{i0}は運動量の成分を言う。ここでは平面波を議論しているので、そのかぎりではエネルギーと結び付く。線形理論の範囲で最大に拡張したものと言うのが妥当であろう。

あとがき

1．これらの議論については、歴史的に奇妙と思える論争が続いた。最近、一応の結論に達したと思う。何のことはない。「能書は止めて、高次補正を実行しよう。」とのことである。とは言うものの、細部に立ち入ると非常に複雑で面倒な議論が介在する。ここでは少し立ち入って、議論の前提になる、しかも易しそうな技術的な部分のさわりに一寸触れてみた（文献［S］、［B］にそそのかされた）。

なお、本稿の記述は［S］に多く拠っている。

問題：改めてCなる公式の誤差はどのくらいあるだろうか？

1.「The derivation of the quadrupole formula (4. 4. 13) in the framework of the linearized theory is possibly misleading. Up to now, there is no really satisfactory derivation of this result based on a systematic approximation scheme which permits an estimate of the errors. It is entirly possible that the validity of (4. 4. 13) is better than its derivation. ・・・. The validity of Einstein's quadrupole formula is at present a source of heated debate.」［S］

2.「The quadrupole formula causes doubt in at least two aspects: (1) its validity in application to compact objects for which the ratio U/c^2 is not small, and (2) the correctness of the conclusion (4. 4. 12) as derived from the quadrupole formula.」［B］

［S］に出てくる（4.4.13）はA式のことであり、［B］に出てくる（4.4.12）とはC式のことである。

［B］：V. A. Brumberg; Essestial Relativistic Celestial Machanics,
Adam Hilger, 1992, 161

［S］：N. Strauman; General Relativity and Relativistic Astrophysics, Springer,
Translated by E. Borie, 1984, 235

この著書の第２版が同じ出版社から1988年に出ている。筆者はこの２版の方がすっきりとした書き方になっていると思う。問題の箇所は初版と殆ど変わっていない（文献学的ミスの修正

がなされている)。微分幾何についての用語は数学辞典(岩波書店、第3版、1985年)とは少し違う。

2．公式Aについて：この公式は1916、18年にアインシュタインによって得られたものである。16年論文の邦訳はいまは手に入りにくい(アインシュタイン全集；第貳巻、改造社、大正12年、445ページ)。そこで本誌15ページに拙訳をした。怪しげな訳だろうけれども意味は取れるだろうと思う。

文献について

公式　A、B、C、の最初の定式は以下のものが最初であると言われている。

A: A.Einstein : S.B.P.A.W., (1918) PP.154

A: A. S.Eddington : Proc. Roy. Soc. London A102 (1923) 268

B: L.D.Landau and E.M.Lifshitz : *The Classical Theory of Fields.*

C: P.C.Peter J.Mathew : Phys. Rev., 131 (1963) 435

C: P.C.Peter Phys. Rev., 136B (1963) 1224

本来ならば本稿で利用した［S，W］以外の文献をも挙げるのが普通であろうと思う。ところがこの問題については事情が複雑であって、筆者は整理できていない。そこで本稿では基本的文献のみに限った。

蛇足

A: S.B.P.A.W.は正式には以下のような長い題名の雑誌である(何回も正式名称を変えている)。Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaftenこの雑誌の名前の省略のされかたは様々である。S. B. Preuss. Akad. Wiss., Sitz. Preuss. Akad. Sitzungsber., Berlin Berichte, Berichte.

B: 何故か知らぬが殆どの文献が(1922)として引用されている。

C: 初版が1939年にロシア語で出版されて以来、現在まで8版(1980)も版を重ねている名著である(英訳、邦訳もある)。最初にどの版でこの公式が書かれたかは筆者は知らない。